UNIVERSITÉ DE NANCY - FACULTÉ DES SCIENCES

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

Auguste LIÉVIN
Ingénieur des Arts et Manufactures.

1re THÈSE : Sur le calcul des constructions complexes.
2e THÈSE : Propositions données par la Faculté.

soutenues le 27 Avril 1933 devant la Commission d'examen

Président	MM.	HUSSON.
Examinateurs		DARMOIS.
		MENTRÉ.

LE CONSTRUCTEUR DE CIMENT ARMÉ
R. C. Seine : 31.925.
148, BOULEVARD DE MAGENTA, 148
PARIS-Xe

1933

UNIVERSITÉ DE NANCY - FACULTÉ DES SCIENCES

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

Auguste LIÉVIN
Ingénieur des Arts et Manufactures.

1re THÈSE : Sur le calcul des constructions complexes.
2e THÈSE : Propositions données par la Faculté.

soutenues le Avril 1933 devant la Commission d'examen

Président . . . . . MM. HUSSON.
Examinateurs . . . . DARMOIS.
MENTRÉ.

LE CONSTRUCTEUR DE CIMENT ARMÉ
R. C. Seine : 31.925.
148, BOULEVARD DE MAGENTA, 148
PARIS-Xe

1933

Université de Nancy – Faculté des Sciences

Doyen : M. LEAU

Assesseur : M. GAIN

Doyen honoraire : M. PETIT

Professeurs honoraires : MM. CARTAN, BLAISE, THOULET, MULLER, GUYOT, GUNTZ, GRIGNARD, DARMOIS E., GUTTON.

Maîtres de conférences honoraires : MM. FÉRÉE, DELATOUR, RICHARD.

Chargé de cours honoraire : M. MILLOT.

Professeurs :

MM.	N.	Chimie agricole.
	CUÉNOT	Zoologie.
	MAUDUIT	Electrotechnique.
	GAIN	Botanique.
	HUSSON	Mécanique rationnelle.
	TRAVERS	Chimie industrielle.
	VAVON	Chimie organique.
	BOURION	Chimie physique et Electrochimie.
	LEAU	Calcul différentiel et intégral.
	DARMOIS	Analyse supérieure.
	FALLOT	Géologie.
	CORNUBERT	Chimie.
	LONGCHAMBON	Minéralogie.
	COURTOT	Chimie appliquée à la teinture.
	CROZE	Physique.
	MENTRÉ	Mathématiques appliquées.
	BOUIN	Zoologie appliquée.
	DE MALLEMANN	Physique.
	JOLY	Géologie de la Lorraine.
	CHEVALIER	Physique.

Maîtres de conférences :

MM.	RAYBAUD	Botanique.
	POIROT	Physique.
	DELSARTE	Mathématiques générales.

Chargé de cours :

M.	LAFFITTE	Chimie générale.

Maître de conférences adjoint :

M.	FRIEDEL	Botanique.

Secrétaire : M. BERTRAND.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

1re THÈSE :

SUR LE CALCUL DES CONSTRUCTIONS COMPLEXES

I. — INTRODUCTION

1. — Nous désignons par constructions continues complexes celles qui sont d'un seul tenant et qui possèdent des étages et des travées en nombre quelconque, leurs éléments étant des portions d'arcs, de sections transversales et de moments d'inertie variables ou non.

La méthode que nous exposerons en premier lieu permettra de déterminer les déplacements élastiques des fibres moyennes sous les actions des efforts tangentiels et normaux, ainsi que les déplacements provoqués par les variations de température.

Nous avons basé cette méthode uniquement sur les propriétés bien connues d'un arc à deux appuis.

Nous démontrerons ensuite que, dans certains cas, la conception d'appuis auxiliaires fictifs permet de réduire notablement l'importance des calculs et d'aborder des problèmes qui peuvent paraître insolubles sans leur emploi.

II. — PRÉLIMINAIRES

2. — Soit la courbe plane G_0G_1 rapportée à deux axes rectangulaires Ox et Oy, qui représente une portion de fibre moyenne d'un arc comprise entre les points G_0 et G_1 (fig. 1).

Les coordonnées du point G_0 étant x_0 et y_0, celles du point G_1 : x_1 et y_1, celles d'un point A quelconque de la fibre moyenne : x et y, les déplacements à partir de l'état naturel seront respectivement pour les points G_0 et G_1, suivant l'axe des x : Δx_0 et Δx_1; parallèlement à l'axe

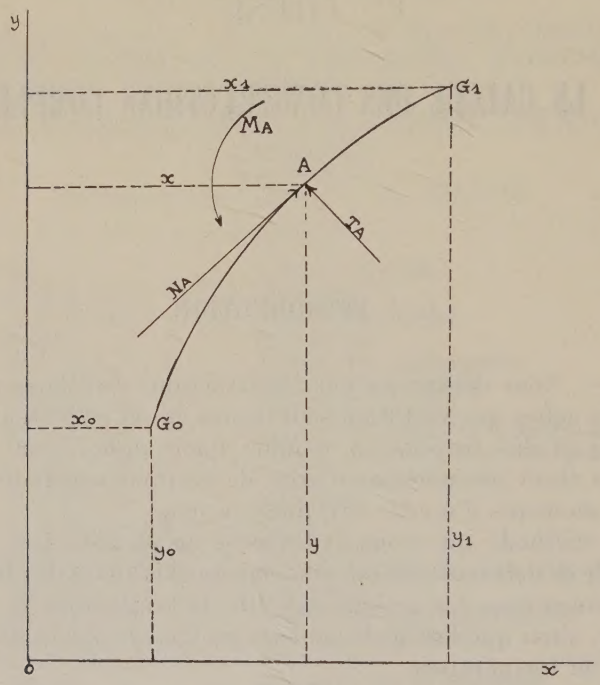


Fig. 1.

des y : Δy_0 et Δy_1, les variations angulaires en ces points seront Ω_0 et Ω_1.

Les sections de l'arc peuvent, en chacun des points de la fibre moyenne, avoir des valeurs différentes ; il en est de même pour les moments d'inertie ; au droit du point A, nous les désignons par S et I.

Les coefficients d'élasticité E relatifs à la compression et à la traction, ainsi que gE pour les efforts tranchants, peuvent pareillement être différents en chaque point de la fibre moyenne.

Nous désignons par N les efforts tangentiels à la fibre

moyenne, par T les efforts tranchants, et par M les moments de flexion des efforts qui existent à la gauche de la section normale faite à la courbe au point A, étant entendu que N est compté positivement, s'il comprime la section A de la partie AG_1, et que T est positif dans la direction prise à gauche de la courbe en la parcourant de G_0 à G_1 ; que les moments sont positifs quand ils sont de sens inverse à celui des aiguilles d'une montre ; si α est le coefficient de dilatation de la matière qui constitue l'arc, t l'excès de la température sur celle du temps de pose, les déplacements de G_1 s'exprimeront alors au moyen des déplacements de G_0 par les formules ci-après, bien connues et dues à Bresse :

$$1^\circ \qquad \Delta x_1 - \Delta x_0 = -\Omega_0 (y_1 - y_0) + \int_{G_0}^{G_1} \frac{M}{EI} (y_1 - y)\, ds$$

$$+ \alpha t (x_1 - x_0) - \int_{x_0}^{x_1} \frac{N dx}{ES} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{T dy}{gES};$$

$$2^\circ \qquad \Delta y_1 - \Delta y_0 = \Omega_0 (x_1 - x_0) - \int_{G_0}^{G_1} \frac{M}{EI} (x_1 - x)\, ds$$

$$+ \alpha t (y_1 - y_0) - \int_{x_0}^{x_1} \frac{N dy}{ES} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{T dx}{gES};$$

$$3^\circ \qquad \Omega_1 - \Omega_0 = -\int_{G_0}^{G_1} \frac{M ds}{EI},$$

où les moments et déplacements angulaires y sont comptés positivement dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre.

Dans les problèmes courants, on ne tient pas compte des déformations dues aux deux derniers termes des deux premières expressions ; pour la facilité d'exposition de ce qui va suivre, nous les supprimerons, les formes intéressantes des résultats n'étant pas influencées par leur existence.

3. — Appliquons ces formules à un arc à deux appuis fixes ; pour abréger, posons :

$$x_1 - x_0 = l,$$
$$y_1 - y_0 = h,$$

nous obtenons :

$$\Omega_0 h = \int \frac{M}{EI}(y_1 - y)\,ds + l\alpha t,$$

$$\Omega_0 l = \int \frac{M}{EI}(x_1 - x)\,ds - h\alpha t,$$

$$\Omega_1 - \Omega_0 = -\int \frac{M ds}{EI}.$$

4. — L'élimination de Ω_0 faite entre les premières équations, donne une formule d'emploi commode dans certaines applications ; cette formule est la suivante :

$$\int \frac{M}{EI}\left[\frac{y_1 - y}{h} - \frac{x_1 - x}{l}\right] ds + \left(\frac{l}{h} + \frac{h}{l}\right)\alpha t = 0.$$

5. — Lorsque les deux appuis ont une même ordonnée, on a :

$$y_1 - y_0 = 0;$$

par suite :

$$h = 0,$$

et les formules deviennent :

$$\int \frac{M}{EI}(y_1 - y)\,ds + l\alpha t = 0,$$

$$\Omega_0 l = \int \frac{M}{EI}(x_1 - x)\,ds,$$

$$\Omega_1 - \Omega_0 = \int \frac{M ds}{EI}.$$

6. — Si les appuis ont une même abscisse, on a :

$$x_1 - x_0 = 0;$$

d'où :

$$\Omega_0 h = \int \frac{M}{EI}(y_1 - y)\,ds,$$

$$0 = \int \frac{M}{EI}(x_1 - x)\,ds - h\alpha t,$$

$$\Omega_1 = -\int \frac{M ds}{EI}.$$

7. — Si un appui est à encastrement, les formules se

simplifient du fait que la rotation à l'appui devient nulle ; pour un arc simplement encastré, on a :

$$0 = \int \frac{M}{EI}(y_1 - y)\,ds + l\alpha t,$$
$$0 = \int \frac{M}{EI}(x_1 - x)\,ds + h\alpha t,$$
$$\Omega_1 = -\int \frac{M\,ds}{EI}.$$

8. — Et pour un arc doublement encastré :

$$0 = \int \frac{M}{EI}(y_1 - y)\,ds + l\alpha t,$$
$$0 = \int \frac{M}{EI}(x_1 - x)\,ds - h\alpha t,$$
$$0 = \int \frac{M\,ds}{EI}.$$

Enfin, si les appuis ont une même ordonnée et si l'on prend le premier appui comme origine des coordonnées, la distance de ces appuis étant l, on a respectivement pour les cas précédents :

9.
$$0 = \int \frac{My\,ds}{EI} + l\alpha t,$$
$$0 = \int \frac{M}{EI}(l - x)\,ds - h\alpha t,$$
$$\Omega_1 = \int \frac{M\,ds}{EI}.$$

10.
$$0 = \int \frac{My\,ds}{EI} + l\alpha t,$$
$$0 = \int \frac{M}{EI}(l - x)\,ds - h\alpha t,$$
$$0 = \int \frac{M\,ds}{EI}.$$

PREMIÈRE PARTIE

MÉTHODE DIRECTE

Nous entendons par méthode directe, celle où l'on fait un emploi immédiat des formules de Bresse.

1° Constructions a un étage.

11. — La manière de procéder que nous exposons s'applique à toutes espèces d'appuis.

Les trois formules de Bresse donnent, pour un arc à deux appuis, trois relations entre les sept expressions :

$$M_0, \quad H_0, \quad V_0, \quad \Delta x_1 - \Delta x_0, \quad \Delta y_1 - \Delta_0, \quad \Omega_0 \text{ et } \Omega_1 - \Omega_0,$$

il en résulte que si quatre expressions sont données, les autres peuvent être déterminées.

a) *Constructions à deux travées.*

12. — Considérons une construction à deux travées représentée par la figure 2, dont les appuis A_0, B_0, C_0 sont fixes, et proposons-nous de calculer les réactions aux appuis, ainsi qu'au point commun aux deux arcs.

Cette construction est soumise aux systèmes d'efforts extérieurs représentés schématiquement par $F(A_0B_1)$,

$F(B_1B_0)$, $F(B_1C_0)$, qui agissent respectivement sur les portions d'arcs A_0B_1, B_1B_0, B_1C_0.

Prenons outre les réactions aux appuis A_0 et B_0 : MA_0, QA_0, VA_0, MB_0, QB_0, VB_0, aussi comme inconnues :

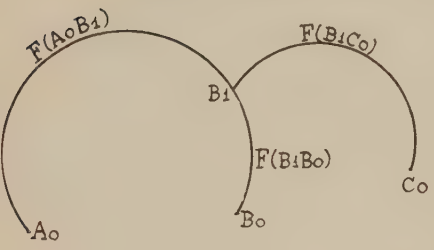


Fig. 2.

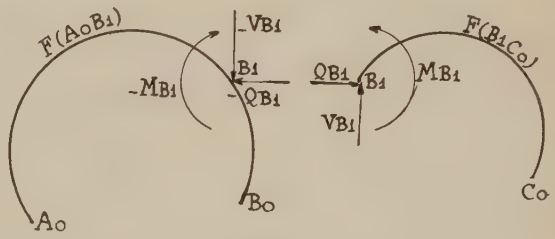


Fig. 3.

MB_1, QB_1, VB_1, actions de l'arc $A_0B_1B_0$ sur l'arc B_1C_0 (fig. 3).

Dans l'arc $A_0B_1B_0$, déterminons MA_0, QA_0, VA_0 en fonction des efforts extérieurs $F(A_0B_1)$, $F(B_1B_0)$, et de $-MB_1$, $-QB_1$, $-VB_1$, calculons ensuite $\Delta x B_1$, $\Delta y B_1$ et ΩB_1, déplacements absolus du point B_1.

Prenons maintenant l'arc B_1C_0, pour lequel nous connaissons déjà les déplacements linéaires relatifs entre B_1 et C_0, ainsi que le déplacement angulaire en B_1 (que nous

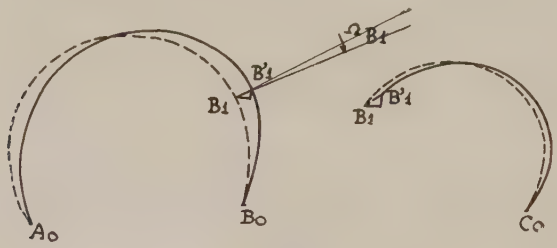


Fig. 4.

venons d'obtenir en fonction des efforts extérieurs $F(A_0B_1)$ et $F(B_1B_0)$ et des inconnues MB_1, QB_1, VB_1).

Les trois formules de Bresse nous permettent de calculer pour cet arc leurs deuxièmes termes en fonction de MB_1, QB_1, VB_1 et de $F(B_1C_0)$, d'où trois équations à trois inconnues, donnant les valeurs de celles-ci en fonction des efforts extérieurs : $F(A_0B_1)$, $F(B_1B_0)$ et $F(B_1C_0)$.

13. — Quand C_0 est une rotule immobile (fig. 5), on

remarque en écrivant les conditions d'équilibre du point C_0, que les trois expressions MB_1, QB_1, VB_1 peuvent être exprimées en fonction de deux d'entre elles, et que pour les déplacements linéaires et angulaires en B_1, les deuxièmes termes des deux premières formules de Bresse exprimées en fonction de ces mêmes inconnues conduisent à deux équations qui les déterminent.

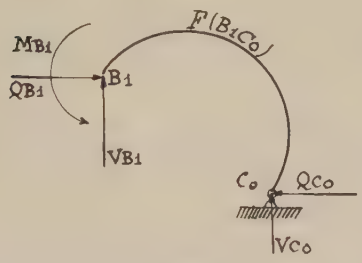


Fig. 5.

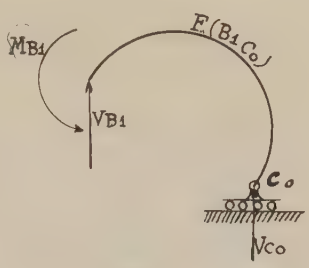


Fig. 6.

14. — Supposons enfin que l'appui C_0 est une rotule qui peut se déplacer sans frottement sur une ligne horizontale (fig. 6) ; en B_1 n'existent que MB_1 et VB_1 ; les conditions d'équilibre du point C_0 indiquent que MB_1 est une fonction de VB_1 et des efforts extérieurs $F(B_1C_0)$.

En égalant, comme précédemment, soit les déplacements linéaires horizontaux, soit ceux verticaux relatifs aux deux premières formules de Bresse, on a l'équation donnant l'inconnue choisie.

b) *Constructions à un nombre quelconque de travées.*

15. — Soit la construction à un nombre quelconque de

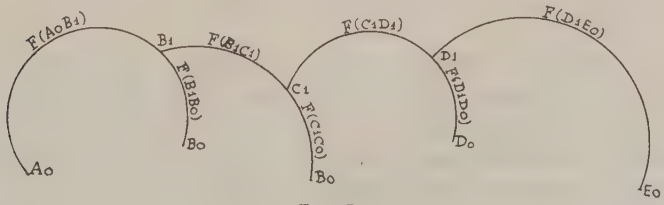


Fig. 7.

travées, quatre par exemple, représentée par la figure 7 et dont tous les appuis sont fixes.

Isolons par la pensée (fig. 8) les deux premières travées et désignons par MC_1, QC_1 VC_1 leurs actions sur le reste de la construction.

Ces travées calculées comme il vient d'être indiqué précédemment, on établit :

$$\Delta x C_1,\ \Delta y C_1,\ \Omega C_1$$

qui sont donc obtenus en fonction des valeurs des efforts

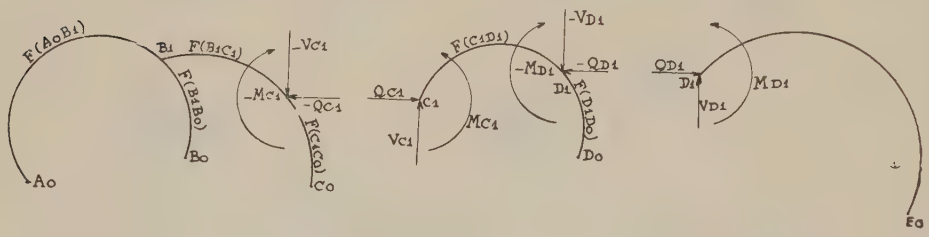


Fig. 8.

extérieurs auxquels elles sont soumises, ainsi que de MC_1, QC_1, VC_1.

Isolons l'arc $C_1D_1D_0$ et soient MD_1, QD_1, VD_1 ses actions sur l'arc D_1E_0.

Les déplacements en C_1 relatifs à cet arc correspondent aux deuxièmes membres des formules de Bresse qui lui sont afférentes et calculées avec ΩC_1 trouvé plus haut ; en égalant leurs valeurs à celles qui dérivent de l'étude des deux premières travées, on obtient trois équations donnant MC_1, QC_1 VC_1, en fonction de tous les efforts extérieurs agissant sur les trois premières travées et de MD_1, QD_1, VD_1.

On calcule ensuite les déplacements en D_1 respectivement pour les arcs C_1 D_1 D_0 et D_1E_0 de la même manière qu'on a fait pour C_1, on a ainsi MD_1, QD_1, VD_1, en fonction de tous les efforts extérieurs donnés ; il en sera de même par substitutions successives pour MC_1, QC_1, VC_1, MB_1, QB_1, VB_1, MA_0, QB_0, VB_0.

16. — La marche de calcul que nous venons d'indiquer s'applique à toutes natures d'appuis. Cependant, quand on a affaire à une construction où ils sont tous à encastre-

ments (fig. 9), il est plus rationnel de procéder de la façon suivante :

Soit la construction à quatre travées représentée à la figure 9 ; on prend comme inconnues les actions d'une por-

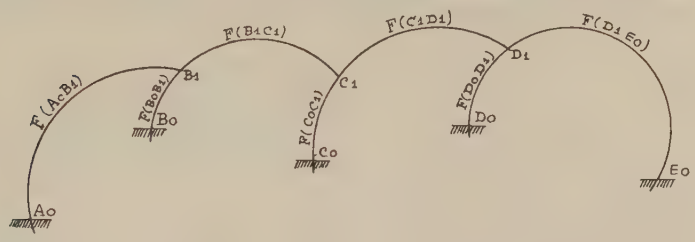


Fig. 9.

tion d'arc sur celle qui la suit immédiatement (fig. 10) ; pour la première on calcule MA_0, QA_0, VA_0 en fonction des efforts extérieurs F (A_0B_1) et de — MB_1, — QB_1, — VB_1, ainsi que les déplacements linéaires et angulaires ΔxB_1, ΔyB_1, ΩB_1 (fig. 10), puis dans l'arc $B_0B_1C_1$ on détermine MB_0, QB_0, VB_0 en fonction des efforts F (B_0B_1),

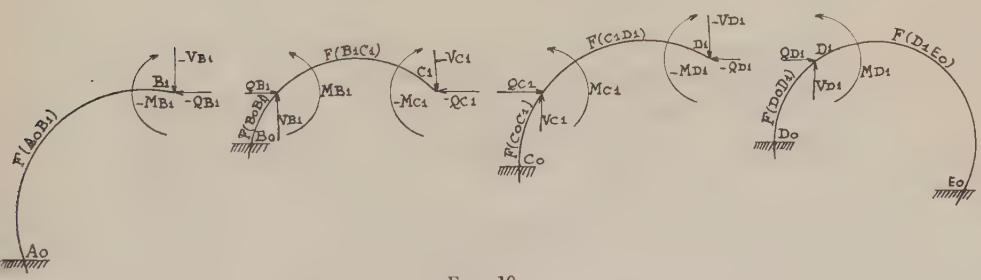


Fig. 10.

F (B_1C_1), MB_1, QB_1, VB_1, — MC_1, — QC_1 — VC_1, et on calcule les déplacements linéaires et angulaires en B_1 et C_1 ; on égale membre à membre les expressions trouvées pour B_1 d'une part, sur A_0B_1 à celles calculées d'autre part, sur $B_0B_1C_1$, et on a ainsi trois équations à trois inconnues qui donnent MB_1, QB_1, VB_1.

On continue de proche en proche jusqu'au dernier arc $D_0D_1E_0$ à deux appuis.

17. — Cette manière de procéder est irréalisable avec

des arcs continus dont tous les appuis seraient à rotules ; car si on écrivait les conditions d'équilibre du point B_1 (fig. 11) et que les sommes des projections des forces sur les axes de coordonnées soient nulles, on obtiendrait QA_0 et VA_0 en fonction de deux des trois expressions — MB_1,

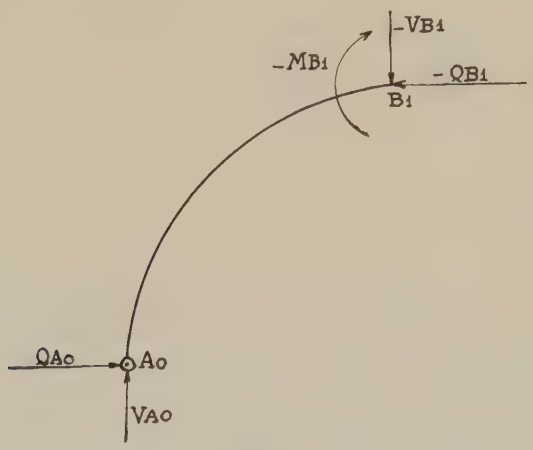


Fig. 11.

— QB_1 et — VB_1, QB_1 et VB_1 par exemple, mais si les trois formules de Bresse donnent bien ΩB_1 — ΩA_0 en fonction de MB_1 et QB_1, par contre, elles ne peuvent donner ni $\Delta x B_1$, ni $\Delta y B_1$ puisque ΩA_0 est inconnu.

2° Constructions a étages.

a) *Constructions à une travée et à deux étages.*

18. — Soit la construction à deux étages indiquée à la figure 12, dont les appuis A_0 et B_0 sont fixes et sur laquelle F (A_0A_1), F (A_1CB_1), F (A_1B_1), et F (B_1B_0) représentent schématiquement les efforts extérieurs agissant respectivement sur les portions d'arc : A_0A_1, A_1CB_1, A_1B_1 et B_1B_0.

Donnons-nous comme inconnues auxiliaires les actions de l'arc A_1CB_1 en A_1 sur l'arc $A_0A_1B_1B_0$ (fig. 13), c'est-à-dire MA_1, QA_1, VA_1, ce qui est suffisant, car dans l'arc

A_1CB_1 on obtient — MB_1, — QB_1, — VB_1, en fonction de MA_1, QA_1, VA_1 et des efforts extérieurs F (A_1CB_1) en écrivant les conditions d'équilibre du point B_1.

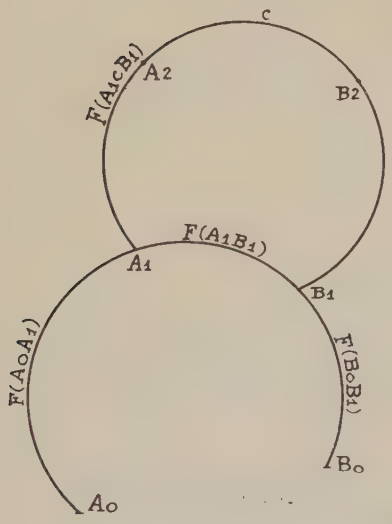


Fig. 12.

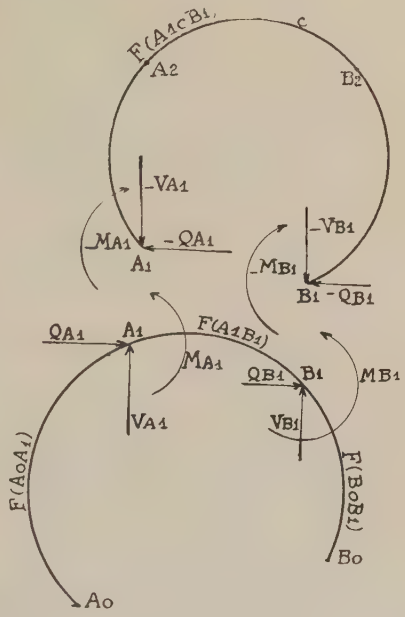


Fig. 13.

Déterminons dans $A_0A_1B_1B_0$ les déplacements absolus des points A_1 et B_1 :

$$\begin{array}{ccc} \Delta x A_1 & \Delta y A_1 & \Omega A_1 \\ \Delta x B_1 & \Delta y B_1 & \Omega B_1, \end{array}$$

lesquels sont donc des fonctions de MA_1, QA_1, VA_1, et des efforts extérieurs F (A_0A_1). F (A_1B_1), F (B_0B_1), il en est de même pour leurs différences :

$$\begin{array}{c} \Delta x B_1 - \Delta x A_1 \\ \Delta y B_1 - \Delta y A_1 \\ \Omega B_1 - \Omega A_1, \end{array}$$

lesquelles sont, d'autre part, les premiers membres des formules de Bresse applicables à l'arc A_1CB_1.

Pour celui-ci nous pouvons déterminer les deuxièmes

membres des formules de Bresse en fonction de MA_1, QA_1, VA_1, et des efforts extérieurs F (A_1CB_1) puisque nous connaissons ΩA_1 que nous venons de calculer.

En les égalant membre à membre on a un système de trois équations à trois inconnues donnant MA_1, QA_1, VA_1, en fonction de tous les efforts extérieurs donnés et par subtitution MA_0, QA_0, VA_0 en fonction de ceux-ci.

19. — Connaissant ΩA_1 de l'arc A_1CB_1, il sera possible pour deux points quelconques A_2 et B_2 de calculer :

$$\begin{array}{lll} \Delta x A_2 & \Delta y A_2 & \Omega A_2 \\ \Delta x B_2 & \Delta y B_2 & \Omega B_2. \end{array}$$

REMARQUE IMPORTANTE

20. — La solution de ce problème, et de ceux qui vont suivre, repose sur la connaissance de l'angle Ω_0 des formules de Bresse (§ 2).

b) *Construction à une travée et à un nombre quelconque d'étages.*

21. — Considérons une construction à un nombre quelconque d'étages, quatre par exemple (fig. 14) ; soumise aux efforts extérieurs F (A_0A_1), F (A_1B_1), F (B_1B_0), F (A_1A_2), F (A_2B_2), F (B_2B_1), etc., agissant sur les portions d'arcs A_0A_1, A_1B_1, B_1B_0, etc., supposons les deux premiers étages séparés en A et B (fig. 15) des étages supérieurs et remplaçons ceux-ci par leurs actions MA_2, QA_2, VA_2... MB_2, QB_2, VB_2.

Calculons ceux-ci comme il vient d'être exposé plus haut et déterminons (voir § 19).

$$\begin{array}{lll} \Delta x A_2 & \Delta y A_2 & \Omega A_2 \\ \Delta x B_2 & \Delta y B_2 & \Omega B_2. \end{array} \qquad (1)$$

Dans ces expressions portons MB_2, QB_2, VB_2, en fonction de MA_2, QA_3, VA_2, et des efforts extérieurs donnés agissant sur les étages supérieurs, ce qu'on obtient en

écrivant pour leur ensemble les conditions d'équilibre du point B_2; ce qui nous permet d'avoir de même :

$$\left.\begin{array}{r}\Delta x B_2 - \Delta x A_2 \\ \Delta y B_2 - \Delta y A_2 \\ \Omega B_2 - \Omega A_2\end{array}\right\} \text{pour les étages 1 et 2.} \quad (2)$$

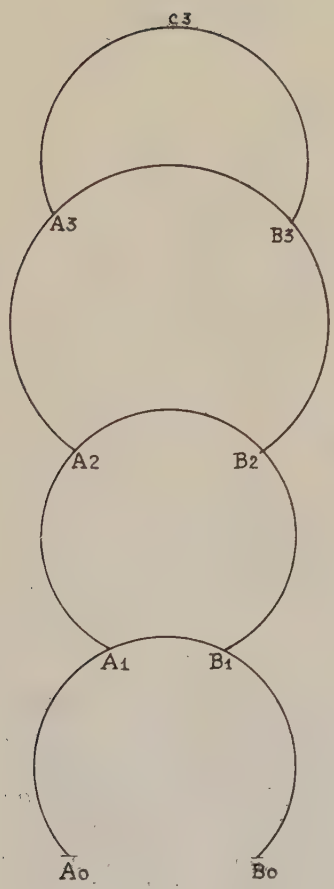


Fig. 14.

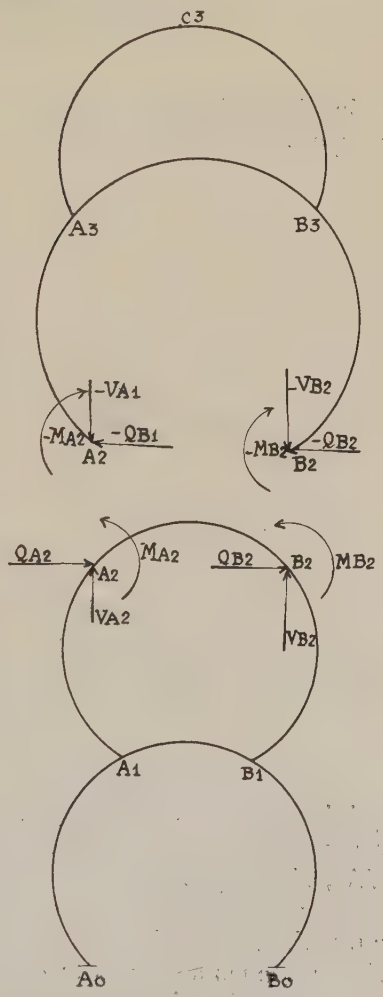


Fig. 15.

Séparons le troisième étage du quatrième et remplaçons (fig. 16) celui-ci par ses actions MA_3, QA_3, VA_3,... MB_3, QB_3, VB_3 sur celui-là.

Nous connaissons ΩA_2 qui permet de calculer les deuxièmes membres des formules de Bresse relatives à l'arc A_2, A_3 B_3, B_2, c'est-à-dire :

$$\left.\begin{array}{r}\Delta x B_2 - \Delta x A_2 \\ \Delta y B_2 - \Delta y A_2 \\ \Omega B_2 - \Omega A_2\end{array}\right\} \text{ pour l'étage 3.} \qquad (3)$$

En égalant membre à membre les expressions du groupe 2 à celles du groupe 3, on obtient trois équations

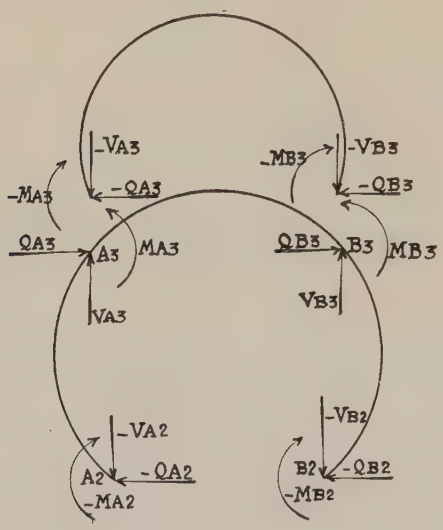


Fig. 16.

qui donnent MA_2, QA_2, VA_2, en fonction des forces extérieures qui agissent sur les trois étages, et de MA_3, QA_3, VA_3, MB_3, QB_3, VB_3.

En suivant la même marche pour le quatrième étage on aura MA_3, QA_3, VA_3, en fonction de tous les efforts extérieurs donnés auxquels la construction est soumise, puis par subtitution de proche en proche MA_2, QA_2, VA_2,..... MA_1, QA_1, VA_1,..... MA_0, QA_0, VA_0.

c) *Constructions à étages et travées en nombre quelconque.*

22. — Soit la construction donnée par la figure 17. Supposons l'ensemble des deuxième et troisième étages, sec-

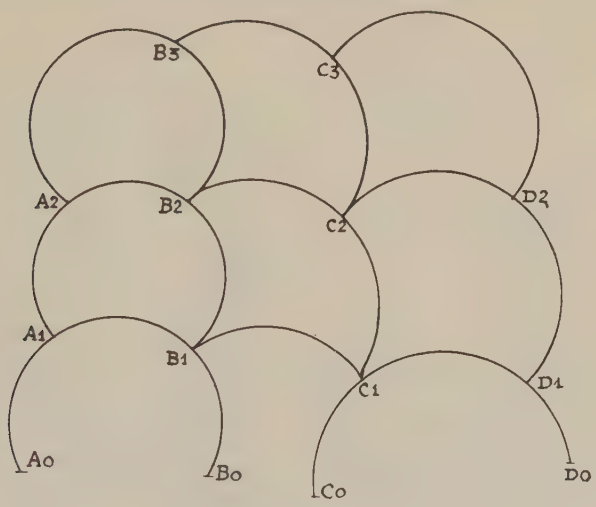


Fig. 17.

tionné aux naissances des arcs du deuxième étage (fig. 18), et remplaçons cet ensemble par ses actions sur l'étage inférieur :

$$\begin{array}{l} MA_1,\ QA_1,\ VA_1,\ldots\ldots\ MB_1,\ QB_1,\ VB_1 \\ MC_1,\ QC_1,\ VC_1,\ldots\ldots\ MD_1,\ QD_1,\ VD_1. \end{array} \qquad (1)$$

Calculons le premier étage qui est un nombre quelconque de travées (§§ 15 et 16), et déterminons :

$$\begin{array}{lll} \Delta x A_1 & \Delta y A_1 & \Omega A_1 \\ \Delta x B_1 & \Delta y B_1 & \Omega B_1 \\ \Delta x C_1 & \Delta y C_1 & \Omega C_1 \\ \Delta x D_1 & \Delta y D_1 & \Omega D_1 \ldots, \end{array} \qquad (2)$$

en fonction des inconnues du groupe (1) ci-dessus et des

autres efforts extérieurs agissant sur toutes les portions de ses arcs élémentaires.

Pour passer au deuxième étage, procédons comme nous l'avons indiqué pour une construction à une travée à deux étages (§ 12), c'est-à-dire que pour l'arc $A_1A_2B_2B_1$ (fig. 19), calculons MB_1, QB_1 VB_1, en fonction de MA_1, QA_1, VA_1 et des efforts extérieurs F (A_1A_2), F (A_2B_2) ;

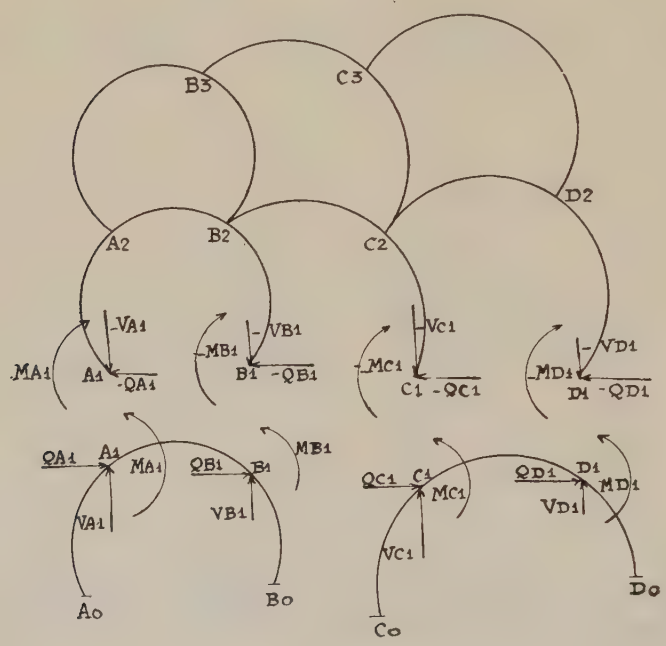


Fig. 18.

F (B_2B_1) et de MA_2, QA_2, VA_2 — $M'B_2$, — $Q'B_2$, — $V'B_2$, et cela en écrivant les conditions d'équilibre du point B_1.

Dans les déplacements du groupe (2), remplaçons MB_1, QB_1, VB_1 ainsi calculés et établissons :

$$\begin{aligned} &\Delta x B_1 - \Delta x A_1 \\ &\Delta y B_1 - \Delta y A_1 \\ &\Omega B_1 - \Omega A_1 \ldots, \end{aligned} \qquad (3)$$

qui ne sont autres que les premiers membres des formules de Bresse pour l'arc $A_1A_2B_2B_1$.

Connaissant ΩA_1 (du groupe 2), nous établissons les deuxièmes membres et obtenons ainsi trois équations qui permettent d'avoir :

MA_1, QA_1, VA_1 en fonction de :

$$MC_1,\ QC_1,\ VC_1, \ldots\ldots\ MD_1,\ QD_1,\ VD_1$$
$$MA_2,\ QA_2,\ VA_2, \ldots\ldots\ MB_2,\ QB_2,\ VB_2$$
$$MB'_2,\ QB'_2,\ VB'_2, \ldots\ldots$$

et des efforts extérieurs qui agissent sur le premier étage et l'arc $A_1A_2B_2B_1$.

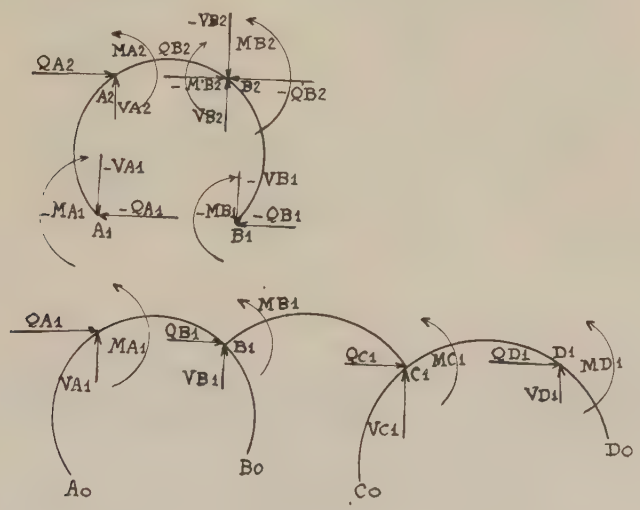


Fig. 19.

Il en sera de même par subtitution dans le groupe (2) pour :

$$\Delta x C_1,\ \Delta y C_1\ \Omega C_1$$
$$\Delta x D_1,\ \Delta y D_1\ \Omega D_1 \qquad (4)$$

Pour aller plus loin dans le calcul du deuxième étage, on établira dans l'arc $A_1A_2B_2B_1$, les déplacements :

$$\Delta x B_2,\ \Delta y B_2,\ \Omega B_2$$

et pour le calcul ultérieur du troisième étage :

$$\Delta x A_2,\ \Delta y A_2,\ \Omega A_2. \qquad (5)$$

Passons maintenant à l'arc $B_2C_2C_1$ (fig. 20) pour lequel nous écrivons les conditions d'équilibre du point C_1.

Nous obtenons ainsi MC_1, QC_1, VC_1, en fonction de MB'_2, QB'_2, VB'_2...., MC_2, QC_2, VC_2..... — MC'_2, — QC' — VC'_2 et des efforts extérieurs F (B_2C_2), F (C_2C_1) ;

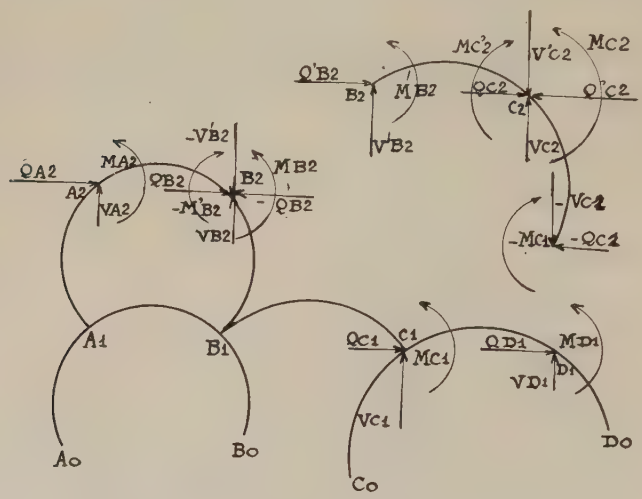


Fig. 20.

substituons les valeurs de MC_1, QC_1, VC_1, ainsi calculées dans les déplacements (4) et (5), et établissons :

$$\Delta x C_1 - \Delta x B_2$$
$$\Delta y C_1 - \Delta x B_2$$
$$\Omega C_1 - \Omega B_2 \ldots,$$

nous avons ainsi les premiers membres des formules de Bresse afférents à l'arc $B_2C_2B_1$.

Connaissant ΩB_2 calculé précédemment, on a les deuxièmes membres, et par là trois équations qui donnent MB'_2, QB'_2, VB'_2 en fonction de MA_2, QA_2, VA_2, MB_2, QB_2, VB_2,..... MC_2, QC_2, VC_2..... $M'C_2$, $Q'C_2$, $V'C_2$,..... MD_1, QD_1, VD_1 et les forces extérieures agissant sur cet ensemble.

Nous remplaçons MB', QB'_2, VB'_2 par leurs valeurs ainsi trouvées dans :

$$\begin{array}{lll} \Delta x A_2 & \Delta y A_2 & \Omega A_2 \\ \Delta x B_2 & \Delta y B_2 & \Omega B_2. \\ \Delta x C_2 & \Delta y C_2 & \Omega C_2 \\ \Delta x D_2 & \Delta y D_2 & \Omega D_2. \end{array} \qquad (6)$$

et nous effectuons pour l'arc $C_2D_2D_1$ la même suite d'opérations que pour $B_2C_2C_1$.

Le troisième étage sera calculé pareillement.

Les trois dernières inconnues du troisième étage seront trouvées en fonction de tous les efforts extérieurs agissant sur la construction donnée (fig. 17), et par substitutions successives dans les expressions de toutes les inconnues auxiliaires on aura tous les éléments nécessaires pour la détermination des arcs considérés.

3° Constructions a étages a grande nef centrale.

23. — Soit la construction donnée par les figures 21 et 23 dont on se propose de calculer les dimensions.

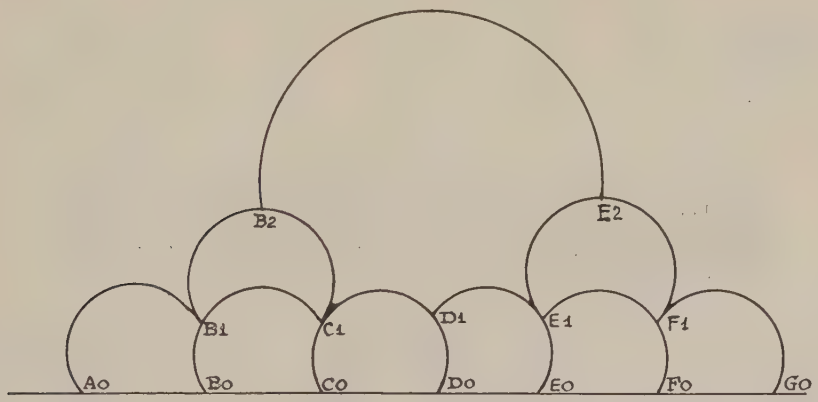


Fig. 21.

Supposons l'arc B_2E_2 sectionné à ses naissances B_2 et E_2, ses actions sur l'ensemble au-dessous de lui étant remplacées par les efforts : MB_2, QB_2, VB_2, ME_2 QE_2 VE_2 (fig. 22), nous savons calculer la construction à étages et déterminer :

$$\begin{matrix} \Delta x B_2 & \Delta y B_2 & \Omega B_2 \\ \Delta x E_2 & \Delta y E_2 & \Omega E_1 \end{matrix} \qquad (1)$$

en fonction de MA_2, QA_2, VA_2 ME_2, QE_2, VE_2, et des dits efforts extérieurs donnés agissant sur elle.

D'autre part, l'arc supérieur peut être regardé comme soumis à :

$$-MB_1 - QB_2 - VB_2 \ldots \qquad ME_2, -QE_2, -VE_2$$

et aux efforts extérieurs F (B_2E_2).

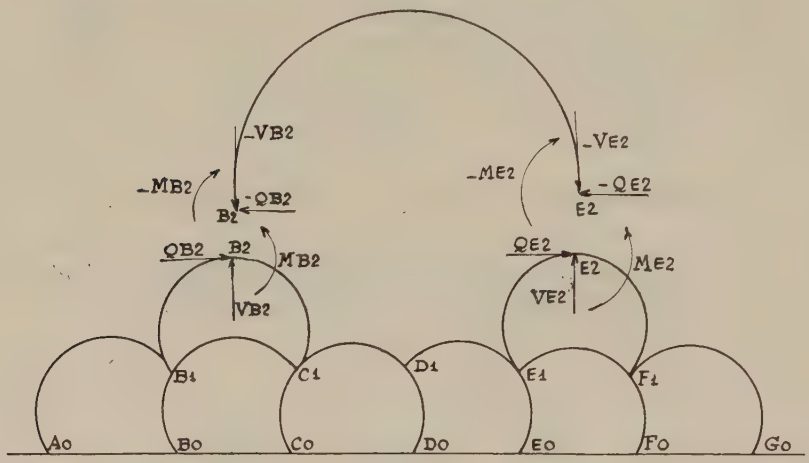


Fig. 22.

Écrivons les conditions d'équilibre du point E_2 ; nous avons ME_2, QE_2, VE_2, en fonction de MB_2, QB_2, VB_2 et des efforts extérieurs F (B_2E_2).

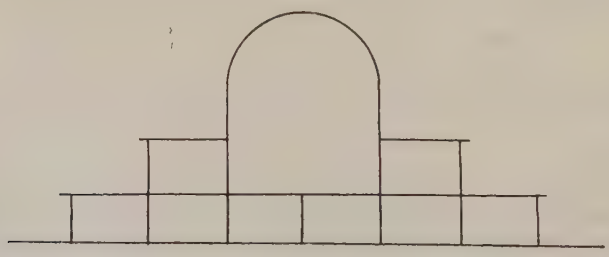


Fig. 23.

Remplaçons ME_2, QE_2, VE_2, en fonction de ces valeurs ainsi calculées, dans le groupe (1) et établissons :

$$\begin{array}{c} \Delta x E_2 - \Delta x B_2 \\ \Delta y E_2 - \Delta y B_2 \\ \Omega E_2 - \Omega B_2 \end{array} \qquad (2)$$

qui sont les premiers membres des formules de Bresse pour l'arc B_2E_2. Connaissant ΩB_2, nous établissons les seconds membres et nous obtenons ainsi trois équations contenant les termes cherchés : MB_2, QB_2, VB_2.

4° Poutres a panneaux quelconques (fig. 24, 30, 31).

24. — Nous considérons (fig. 24) la première boucle séparée des autres en B_0 et B_1, et soumise aux réactions

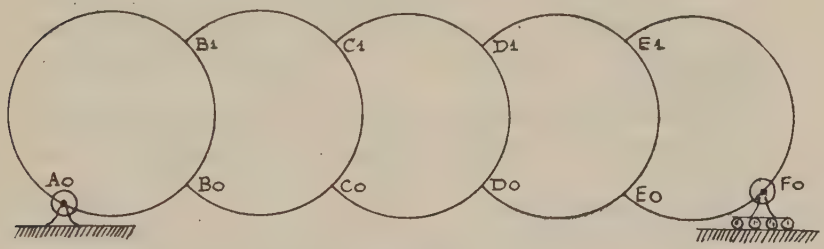


Fig. 24.

QA_0, VA_0 de l'appui A_0, aux forces extérieures F (A_0B_1), F (B_1B_0), F (B_0A_0), ainsi qu'à MB_0, QB_0, VB_0 et MB_1, QB_1, VB_1 (fig. 25) : actions des autres boucles sur elle.

Par un point B′ quelconque, menons une horizontale

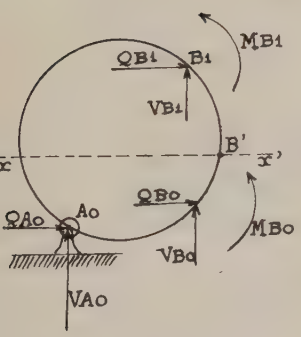


Fig. 25.

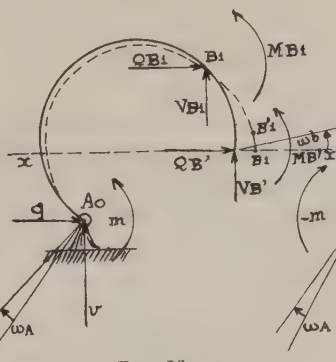


Fig. 26.

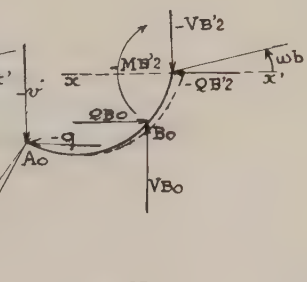


Fig. 27.

xx' qui la divise en deux arcs $A_0B_1B'_1$ et $A_0B_0B'_2$ (fig. 26 et 27).

Prenons A_0 comme origine de l'arc A_0B_1B' (fig. 26).

Calculons les déplacements : $\Delta x B'_1$, $\Delta y B'_1$, $\Omega B'_1$ en fonction de m, q et v, des efforts extérieurs et de ΩA_0, dans $A_0B_1B'_1$.

Procédons de même sur l'arc $A_0B_0B'_2$ en fonction de $-m$ q', v' et des efforts extérieurs (fig. 27) ; posons les égalités :

$$AyB'_1 = \Delta x B'_2 \quad \Delta y B'_1 = \Delta y B'_2 \quad \Omega B'_1 = \Omega B'_2.$$

Nous avons ainsi trois équations pour m, q, v, q', v' dans lesquelles Ω_0 ayant le même coefficient dans les termes de droite et de gauche d'une même équation, disparaît.

L'appui de droite est un chariot se déplaçant sans frottement sur une droite horizontale, nous avons $QA_0 = q - q' = 0$.

Nous pouvons écrire :

$$q - q' = 0$$
$$v - v' = VA_0.$$

VA_0 étant obtenu en fonction des forces extérieures agissant sur la poutre, en écrivant les conditions d'équilibre du point F_0, nous avons donc 5 équations donnant les 5 inconnues, m, p, q, q', v'.

Pour passer à la boucle suivante, nous aurons soin de déterminer dans la première :

$\Delta x B_0$, $\Delta y B_0$, ΩB_0, $\Delta x B_1$, $\Delta y B_1$, ΩB_1, en valeurs absolues, Ω_0 étant supposé connu.

Dans ces expressions nous remplaçons MB_0, QB_0, VB_0, par leurs valeurs obtenues en fonction de MB_1, QB_1, VB_1, des efforts extérieurs agissant sur B_1C_1, C_1C_0, C_0B_0 et de MC_1, QC_1, VC_1, MC_0, QC_0, VC_0 en écrivant les conditions d'équilibre du point B_1 (fig. 28).

Nous établirons ensuite :

$$\Delta x B_0 - \Delta x B_1$$
$$\Delta y B_0 - \Delta y B_1$$
$$\Omega B_0 - \Omega B_1 \ldots.$$

qui sont les premiers membres des formules de Bresse pour l'arc $B_1C_1C_0B_0$. Connaissant ΩB_1, nous calculerons

les deuxièmes membres et nous aurons ainsi trois équations qui donneront MB_1, QB_1, VB_1 en fonction des efforts extérieurs agissant sur les deux premières travées et de

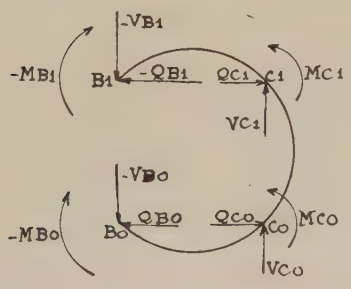


Fig. 28.

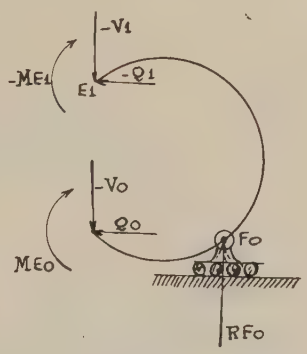


Fig 29.

MC_0, QC_0, VC_0, MC_1, QC_1 VC_1 (Ω_0 disparaissant dans la résolution des équations).

Nous continuerons de la même façon de proche en proche pour les boucles suivantes.

Pour l'avant-dernière travée, nous obtiendrons ME_1,

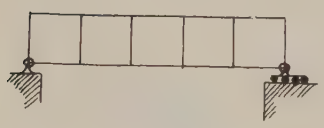


Fig. 30.

Fig. 31.

QE_1, VE_1, en fonction de tous les efforts extérieurs qui agissent sur la construction y compris RF_0, réaction connue de l'appui à rotule mobile sur un plan horizontal.

5° Portiques a panneaux (figures 32, 38, 39 et 40).

25. — Nous commencerons par résoudre le problème de la potence à boucle fermée donnée par la figure 33.

Pour calculer cette dernière il nous suffira de connaître MA_1, QA_1, VA_1 ; pour ce faire (fig. 34), menons une

tangente verticale yy' et par A′, une horizontale xx'. Supposons la boucle sectionnée en A_1 et A′ et retournons

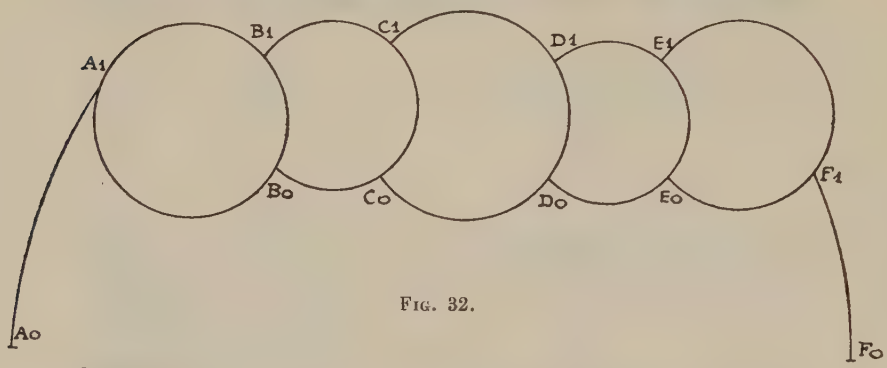


Fig. 32.

la partie (fig. 35) inférieure, symétriquement autour de xx'.

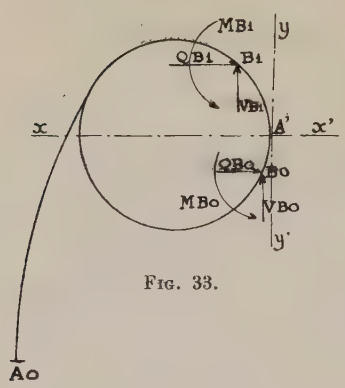


Fig. 33.

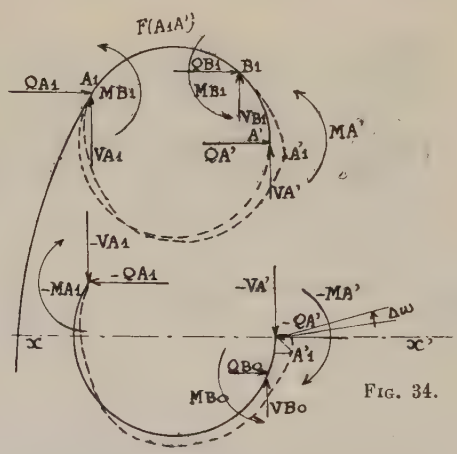


Fig. 34.

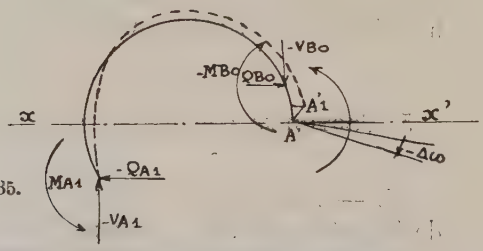


Fig. 35.

Les actions de la partie inférieure sur la supérieure étant MA_1, QA_1, VA_1, MA′, QA′, VA′ (fig. 34).

Dans la partie A_0A_1A' (fig. 34), calculons :

$$\Delta x A_1,\ \Delta y A_1,\ \Omega A_1$$

et

$$\Delta x A',\ \Delta y A',\ \Omega A'.$$

en fonction de MA_1, QA_1, VA_1, MA', QA', VA', et des forces extérieures agissant sur elle.

Établissons :

$$\begin{array}{l} \Delta x A_1 - \Delta x A' \\ \Delta y A_1 - \Delta y A' \\ \Omega A_1 - \Omega A'_1. \end{array}$$

Dans la partie inférieure, soumise aux efforts extérieurs dans leur position symétrique, nous connaissons $\rightarrow \Omega A_1$ (ΩA_1, calculé déjà dans la boucle A_0A_1A') ; établissons :

$$\begin{array}{l} \Delta x A_1 - \Delta x A' \\ \Delta y A_1 - \Delta y A' \\ \Omega A_1 - \Omega A' \ldots \end{array} \qquad (2)$$

que nous égalons membre à membre avec les précédents en changeant les signes des deux dernières expressions.

Nous aurons ainsi 3 équations contenant les six inconnues :

MA, QA, VA,... MA', QA', VA', mais dans la partie inférieure nous avons encore 3 équations en écrivant les conditions d'équilibre du point A' ; nous avons donc finalement les 6 équations nécessaires pour la détermination de : MA_1, QA_1, VA_1 cherchés.

Dans les efforts extérieurs de la potence que nous venons d'examiner, nous avons eu soin de comprendre les actions de la construction située à droite des sections faites en B_1 et B_0, c'est-à-dire MB_0, QB_0, VB_0, MB_1, QB_1, VB_1, ainsi que de calculer :

$$\begin{array}{lll} \Delta x B_0 & \Delta y B_0 & \Omega B_0 \\ \Delta x B_1 & \Delta y B_1 & \Omega B_1 \end{array} \qquad (3)$$

Considérons maintenant la deuxième boucle $B_1C_1C_0B_0$, (fig. 36), isolée du reste de la construction par des sections

faites en C_0 et C_1 et remplaçons les actions de la construction située à droite par :

$$MC_0,\ QC_0,\ VC_0. \qquad MC_1,\ QC_1,\ VC_1.$$

Dans l'arc $B_0C_0C_1B_1$ écrivons les conditions d'équilibre du point B_0 afin d'obtenir MB_1, QB_1, VB_1 en fonction de

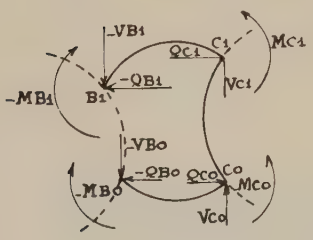


Fig. 36.

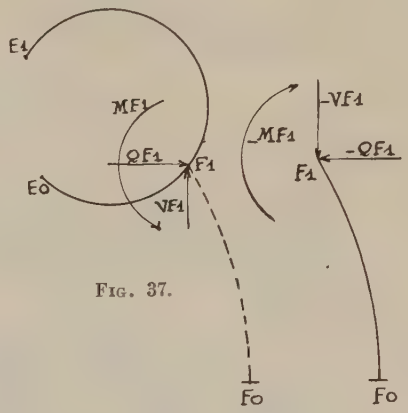


Fig. 37.

MB_0, QB_0, VB_0 et des efforts extérieurs agissant sur cet arc.

Remplaçons MB_1, QB_1, VB_1, par ces expressions ainsi calculées dans le groupe 3 ci-dessus et écrivons :

$$\begin{aligned} &\Delta x B_0 - \Delta x B_1 \\ &\Delta y B_0 - \Delta y B_1 \\ &\Omega B_0 - \Omega B_1 \end{aligned} \qquad (4)$$

qui sont les premiers membres des formules de Bresse pour l'arc $B_0C_0C_1B_1$.

Connaissant ΩB_0, établissons-en les deuxièmes membres ; nous obtenons ainsi trois équations permettant d'avoir MB_0, QB_0, VB_0 en fonction des efforts extérieurs qui agissent sur la potence et la deuxième boucle, ainsi que de :

$$MC_0,\ QC_0,\ VC_0. \qquad MC_1,\ QC_1,\ VC_1.$$

On aura soin de calculer les déplacements absolus :

$$\Delta x C_1,\ \Delta y C_1,\ \Omega C_1. \qquad \Delta x C_0,\ \Delta y C_0,\ \Omega C_0$$

et on traitera la troisième boucle comme on vient de faire pour la 2e.

Pour la dernière boucle (fig. 37) on aura obtenu les déplacements $\Delta x F_1$, $\Delta y F_1$, ΩF_1 en fonction de tous les efforts extérieurs qui agissent sur la partie de gauche de la construction sectionnée en F_1.

Dans l'arc encastré F_1F_0, soumis aux efforts extérieurs qui agissent sur lui, ainsi que $-MF_1$, $-QF_1$, $-VF_1$, on peut calculer les déplacements absolus $\Delta x F_1$, $\Delta y F_1$, ΩF_1; en égalant ces expressions membre à membre avec celles établies plus haut, on a MF_1, QF_1, VF_1, en fonction de

Fig. 38.

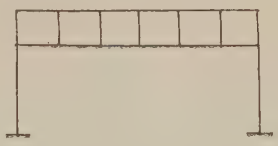


Fig. 39.

Fig. 40.

tous les efforts extérieurs qui agissent sur la construction ; on obtiendra de proche en proche, en retournant au premier appui, tous les éléments des calculs pour la détermination des dimensions des portions d'arcs considérées.

6° Constructions triangulées.

26. — Soit les constructions données par les figures

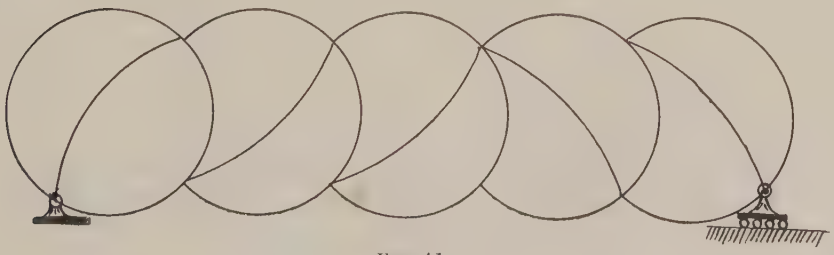


Fig. 41.

41 et 42 qui correspondent aux problèmes traités aux *Portiques et poutres à panneaux*, mais dont les boucles

sont réunies par un arc joignant deux nœuds non consécutifs (sauf pour les premières et dernières boucles).

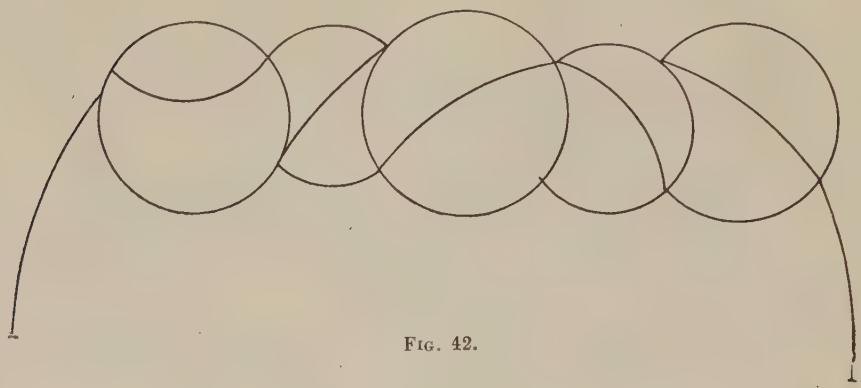


Fig. 42.

Donnons la solution générale de ce problème en considérant une boucle (fig. 43) quelconque, la précédente étant supposée calculée.

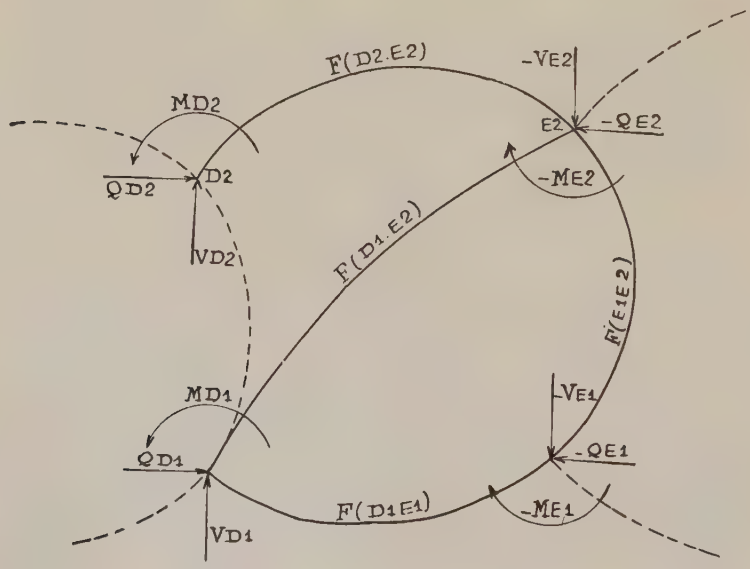


Fig. 43.

1° Déterminons MD_1, QD_1, VD_1, en fonction de MD_2, QD_2, VD_2 et des efforts extérieurs $F(D_2E_2)$, $F(E_1E_2)$, $F(D_1$

E_1), F (D_1E_2), — ME_2, — QE_2, — VE_2, — ME_1, QE_1, VE_1, en écrivant les conditions d'équilibre du point D (fig. 43).

2° Remplaçons MD, QD, VD, par ces valeurs ainsi trouvées dans les expressions établies antérieurement de :

$$\begin{array}{lll} \Delta x D_1, & \Delta y D_1, & \Omega D_1 \\ \Delta x D_2, & \Delta y D_2, & \Omega D_2. \end{array} \qquad (1)$$

3° Établissons avec celles-ci, les différences suivantes :

$$\begin{array}{l} \Delta x D_1 - \Delta x D_2 \\ \Delta y D_1 - \Delta y D_2 \\ \Omega D_1 - \Omega D_2 \end{array} \qquad (2)$$

afférentes à la boucle précédente.

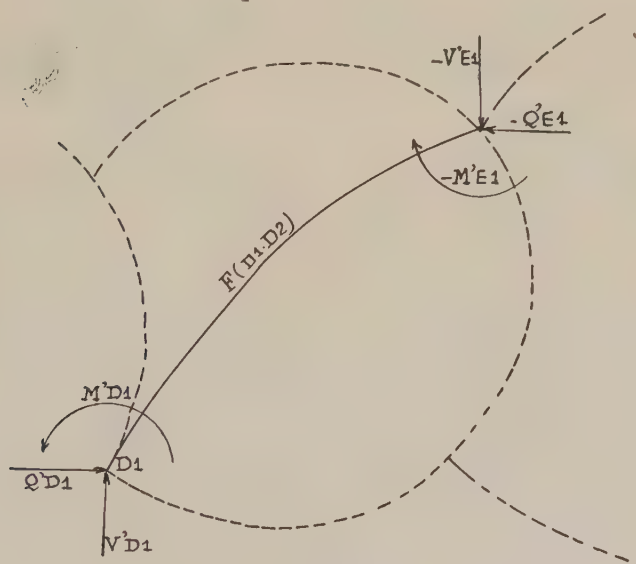


Fig. 44.

4° Pour l'arc $D_2E_2E_1D_1$ remplaçons l'arc D_1E_2 par ses actions :

$$\begin{array}{lll} -MD'_1 & -QD'_1 & -VD'_1 \\ M'E_2 & Q'E_2 & V'E_2 \text{ (fig. 45)} \end{array} \qquad (3)$$

5° Dans cet arc D_1E_2 (fig. 44) calculons — $M'E_2$, — $Q'E_2$, — $V'E_2$ en fonction de $M'D_1$, $Q'D_1$, et de F (D_1E_2) et transportons dans le groupe (3) ces valeurs ainsi calculées.

6° Pour l'arc $D_2E_2E_1D_1$ (fig. 45) comme nous connaissons ΩD_2 (groupe 1), calculons à l'aide des formules de Bresse :

$$\begin{aligned} &\Delta x D_1 - \Delta x D_2 \\ &\Delta y D_1 - \Delta y D_2 \\ &\Omega D_1 \quad - \Omega D_2. \end{aligned} \qquad (4)$$

7° Égalons les expressions des deux groupes (2 et 4), membre à membre, nous avons ainsi trois équations qui donnent : MD_2, QD_2, VD_2 en fonction de $F(D_2E_2)$, $F(E_1E_2)$,

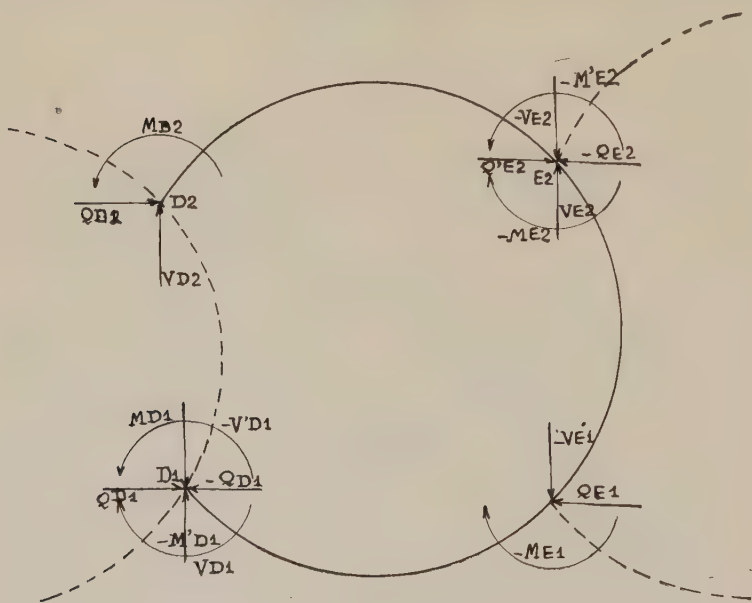


Fig. 45.

$F(D_1E_1)$, $F(D_1E_2)$, $-ME_1$, $-QE_1$, $-VE_1$, $-ME_2$, $-QE_2$, $-VE_2$ et de MD'_1, QD'_1, VD'_1 (fig. 45).

8° Pour l'arc DE_2 (fig. 35), nous connaissons ΩD_2 (groupe 1); calculons donc à l'aide des formules de Bresse :

$$\begin{aligned} &\Delta x D_2 - \Delta x E_2 \\ &\Delta y D_2 - \Delta x E_2 \\ &\Omega D_2 - \Omega E_2. \end{aligned} \qquad (5)$$

9° Ajoutons membre à membre (4) et (5), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\Delta x D_1 - \Delta x E_2 \\ &\Delta y D_1 - \Delta y E_2 \\ &\Omega D_1 - \Omega E_2. \end{aligned} \qquad \text{pour l'arc } E_2E_1D_1. \qquad (6)$$

10° ΩD_1 (groupe 1) est connu par l'arc isolé D_1E_2 (fig. 44), écrivons les expressions suivantes à l'aide des formules de Bresse :

$$\begin{aligned} &\Delta x D_1 - \Delta x E_2 \\ &\Delta y D_1 - \Delta y E_2 \\ &\Omega D_1 - \Omega E_2. \end{aligned} \qquad (7)$$

11° Égalons membre à membre les expressions des groupes (6) et (7), nous aurons trois équations qui donneneront $M'D_1$, $Q'D_1$, $V'D_1$ en fonction des efforts exté-

Fig. 46.

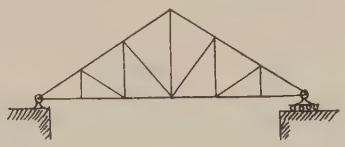


Fig. 47.

Fig. 48.

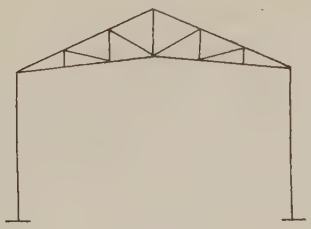


Fig. 49.

rieurs qui agissent sur la construction jusqu'à la boucle considérée, ainsi que de $-ME_1$, $-QE_1$, $-VE_1$ et $-ME_2$, $-QE_2$, $-VE_2$.

On effectuera pour les boucles suivantes les mêmes séries d'opérations.

27. — Les constructions indiquées aux figures 46, 47, 48 et 49 ne sont que des cas particuliers de celui que nous venons d'étudier, où l'arc joignant des nœuds non consécutifs est remplacé par une barre rectiligne.

7° Portique a contreventements.

28. — Soit la construction donnée par la figure 50 et supposons la potence calculée (fig. 51), problème traité aux portiques à panneaux (§ 25).

Dans la deuxième boucle (fig. 52), calculons $-M_3$, $-Q_3$, $-V_3$ en fonction des efforts extérieurs qui agissent sur elle et de M_5, Q_5, V_5, en écrivant les conditions d'équilibre du point 3.

Remplaçons M_3, Q_3, V_3 dans Δx_3 Δy_3, Ω_3 de l'opération précédente, en fonction de ces valeurs ainsi calculées.

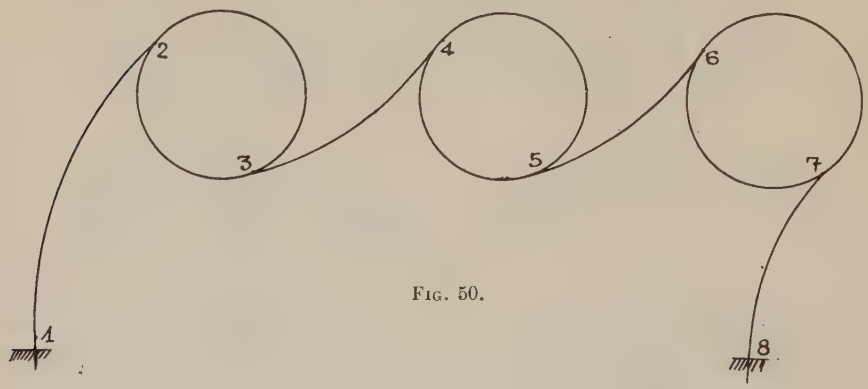


Fig. 50.

Nous connaissons Ω_3; calculons M_4, Q_4, V_4, ainsi que :

$$\Delta x_5 - \Delta x_3$$
$$\Delta y_5 - \Delta x_3$$
$$\Omega_5 - \Omega_3.$$

Mais ayant déjà Δx_3, Δy_3, Δ_3, nous obtenons de ce fait Δx_5, Δy_5 et Ω_5.

Remplaçons dans ces expressions M_5, Q_5, V_5 en fonction de M_7, Q_7, V_7 et des efforts extérieurs agissant sur la boucle 5, 6, 7 en écrivant les conditions d'équilibre du point 5.

Nous connaissons Ω_5 pour la troisième boucle; nous calculerons ensuite Δx_7, Δy_7 et Ω_7 comme pour la deuxième boucle.

Pour le dernier arc 7-8, nous déterminerons M_7, Q_7, V_7

en fonction de M_8, Q_8 et V_8. Connaissant Ω_7, nous aurons Δx_8, Δy_8 et $\Delta\Omega_8$ que nous égalerons respectivement à zéro. Nous avons trois équations qui donnent M_8, Q_8, V_8 en

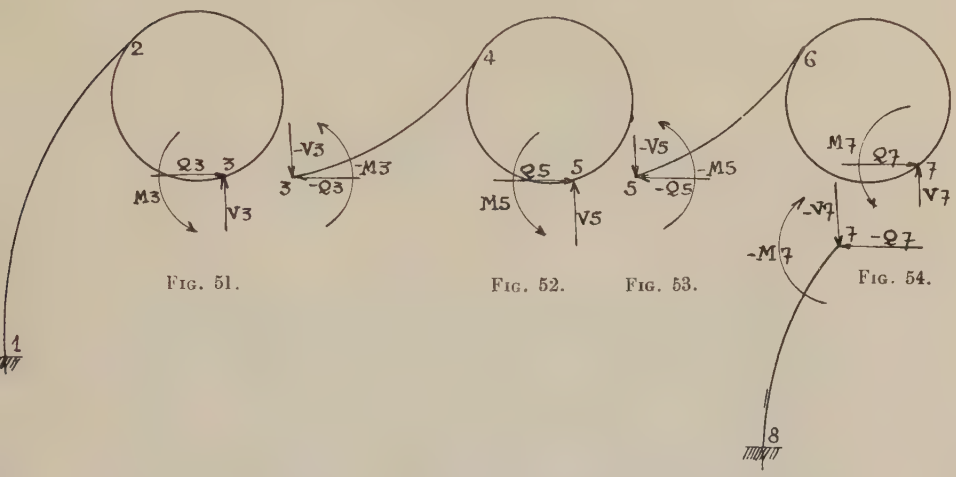


Fig. 51. Fig. 52. Fig. 53. Fig. 54.

fonction des efforts extérieurs qui agissent sur la construction et il en est de même pour toutes les inconnues intermédiaires, par substitution de proche en proche, jusqu'à l'appui 1.

Si les appuis 1 et 8 étaient à rotules et fixes, on intro-

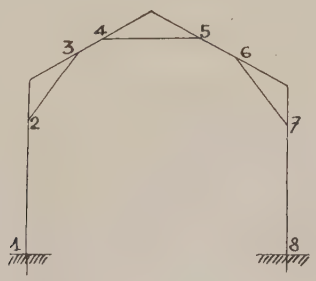


Fig. 55.

duirait le déplacement angulaire Ω_1 du premier appui, qui subsisterait jusqu'aux calculs afférents à l'appui 8.

En ayant soin de remplacer M_7, Q_7, V_7 en fonction de Q_8 et V_8 dans les équations et en observant que V_8 est donné

par la statique, on obtiendra les déplacements élémentaires de 8 sous la forme de :

$$\Delta x_8 = a\Omega_1 + a'Q_8$$
$$\Delta y_8 = b\Omega_1 + b'Q_8.$$

Les appuis étant immobiles, par hypothèse, on a :

$$\Delta x_8 = 0, \qquad \Delta y_8 = 0.$$

En éliminant Ω_1 entre les deux équations, on a Q_8 cherché.

OBSERVATIONS

29. — Nous avons traité toutes ces constructions dans le cas le plus général où tous les éléments sont des arcs quelconques, supportant des charges quelconques.

Quand ceux-ci sont rectilignes, quand les nœuds sont astreints à se déplacer sur des droites, quand ils ont entre eux des distances qui restent fixes, les solutions sont plus simples, car le nombre d'inconnues en est diminué d'autant, ce que nous mettrons en évidence plus loin, aux applications pratiques.

DEUXIÈME PARTIE

MÉTHODE DES APPUIS AUXILIAIRES A ROTULES

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE

30. — Lors d'une conférence que nous avons faite, en 1918, à Ekaterinodar, devant les ingénieurs russes en résidence dans le Kouban ainsi que dans notre ouvrage sur le calcul de grandes constructions continues, édité en 1921, à la suite des articles parus depuis novembre 1919 dans la revue *le Ciment armé*, nous avons indiqué que la recherche des efforts élastiques d'une construction pouvait être ramenée à deux problèmes plus simples que l'étude directe.

31. — C'est une question sur laquelle nous trouvons nécessaire de revenir pour les motifs ci-après :

1° Nous en donnerons une meilleure démonstration ;

2° Nous indiquerons que nous pouvons tenir compte de l'influence des variations de température, tandis que jusqu'alors nous ne nous étions occupé que de l'influence des moments fléchissants ;

3° Nous perfectionnerons notre méthode pour le cas de constructions non rectilignes ;

4° Nous aborderons des applications plus compliquées.

32. — Le principe sur lequel nous nous appuyons pour tout ce qui est exposé ci-après est celui de superposition qui peut être énoncé comme suit :

Lorsque plusieurs systèmes de forces agissent simultanément sur un corps libre ou qui repose sur des appuis, les forces intérieures, les déplacements et les réactions d'appuis s'obtiennent par additions géométriques des forces intérieures, des déplacements et réactions d'appuis qui se produiraient si chacun des systèmes de forces considérées agissait seul; si la chaleur intervient, ses effets se superposent de même aux effets des systèmes de forces envisagées ci-dessus.

33. — Nous appliquons ce principe à une construction prise à l'état naturel avec ses liaisons et dont les supports sont bien posés sur des appuis indéformables.

Ajoutons des liaisons auxiliaires en plus des liaisons existantes; appliquons alors sur cette construction les charges données, lesquelles y provoquent une déformation auxiliaire et déterminons les forces de liaison auxiliaires R.

Supprimons les liaisons auxiliaires et substituons-leur les forces de liaison R correspondantes, de façon à respecter la déformation auxiliaire.

Si, en outre, nous soumettons la construction à des forces R′ égales et opposées aux forces de liaison R, il n'agira plus sur la construction que les charges données et nous aurons obtenu, de ce fait, la déformation réelle correspondant à l'action de celles-ci.

On passe donc de la déformation auxiliaire (compatible avec les liaisons auxiliaires) à la déformation réelle en ajoutant les forces R′.

34. — D'après le principe de superposition des efforts, on a donc le résultat suivant :

Les forces élastiques réelles s'obtiennent en ajoutant aux forces élastiques de déformation auxiliaire sous l'action des charges données et des liaisons auxiliaires, les forces élastiques qui seraient dues aux seules charges R′.

On peut d'ailleurs obtenir les forces élastiques dues aux charges R′ en changeant le signe des forces élastiques qui seraient dues aux charges R.

35. — Comme liaisons auxiliaires pour les constructions planes, nous avons trouvé qu'il était avantageux de considérer celles qui proviennent d'appuis fictifs auxiliaires à rotule, dont l'axe est immobile par rapport au plan des

appuis et de substituer à ces liaisons auxiliaires les forces de liaisons correspondantes qui se réduisent à l'action des axes sur la construction elle-même, c'est-à-dire à la réaction de ces axes, les rotations de la fibre moyenne qui est au droit de l'axe de la rotule, réalisées par un œillet, tournant librement sans frottement autour de son axe constitué par une broche.

36. — De ce qui précède, il résulte donc que pour appliquer cette méthode nous sommes conduits à étudier séparément :

1° Les effets des charges sur les constructions à appuis auxiliaires ;

2° Les effets des réactions des appuis auxiliaires sur les constructions à leur état naturel ;

3° A soustraire ces effets.

Remarques.

37. — Les effets des charges sur les constructions à appuis auxiliaires produisent des déformations qui sont déterminées par la généralisation des problèmes des poutres et arcs continus.

38. — Les déformations auxiliaires sont faciles à étudier car elles sont produites sous l'action des seules forces R, puisqu'il n'y a pas d'autres forces le long des arcs.

A. — *DES APPUIS AUXILIAIRES*

1° Des appuis auxiliaires a rotule et de leurs emplacements.

39. — On choisira les emplacements des appuis auxiliaires à rotule de telle manière que la fibre moyenne de la partie comprise entre deux quelconques d'entre eux ne présente pas de nœuds.

D'où il ressort qu'il y aura lieu de placer un appui auxiliaire en chacun des nœuds.

Pour faciliter la solution de certains problèmes, on peut être conduit à placer des appuis auxiliaires ailleurs qu'aux nœuds, lorsque la fibre moyenne est une ligne

brisée ; on serait tenu, par exemple, à en placer à la rencontre d'un élément droit avec une partie courbe, voire même à la rencontre de deux éléments rectilignes.

40. — Si on considère une position de fibre moyenne limitée par deux appuis auxiliaires et qu'on suppose celle-ci séparée des portions adjacentes, on pourra toujours l'envisager comme un arc à deux appuis fixes et lui appliquer les propriétés connues.

2° Rotations des rotules (fig. 56).

41. — Considérons la rotule A afférente à un appui auxiliaire; l'œillet qui entoure la broche entraîne dans sa

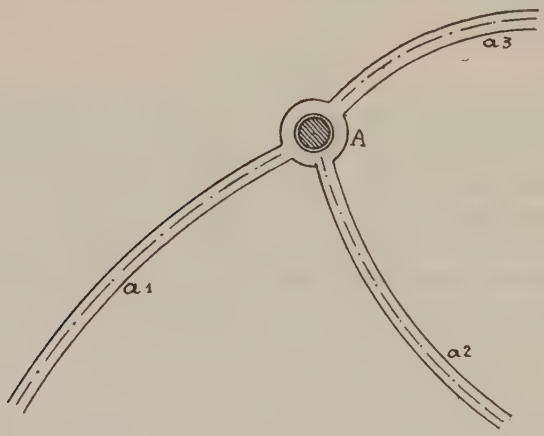


Fig. 56.

rotation Ω_a tous les éléments d'arcs qui y aboutissent, car les angles entre ces éléments sont invariables.

L'œillet exerce sur l'arc a_1 une action de composantes Qa_1 et Va_1 et un couple Ma_1 (fig. 57).

On peut donc concevoir que l'œillet joue pour chaque branche le rôle d'un encastrement en créant une force et un couple de liaison.

Les systèmes des couples $-Ma_1$, $-Ma_2$, $-Ma_3$..., que différents éléments exercent sur l'œillet, ne peuvent pas être équilibrés par l'action de la broche sur l'œillet et, de

ce fait, la somme algébrique ΣMa doit être nulle ; par contre, le système des forces $-Qa_1$, $-Va_1$, $-Qa_2$, $-Va_2$ $-Qa_3$, $-Va_3$ a une résultante qui est équilibrée par l'action de la broche sur l'œillet.

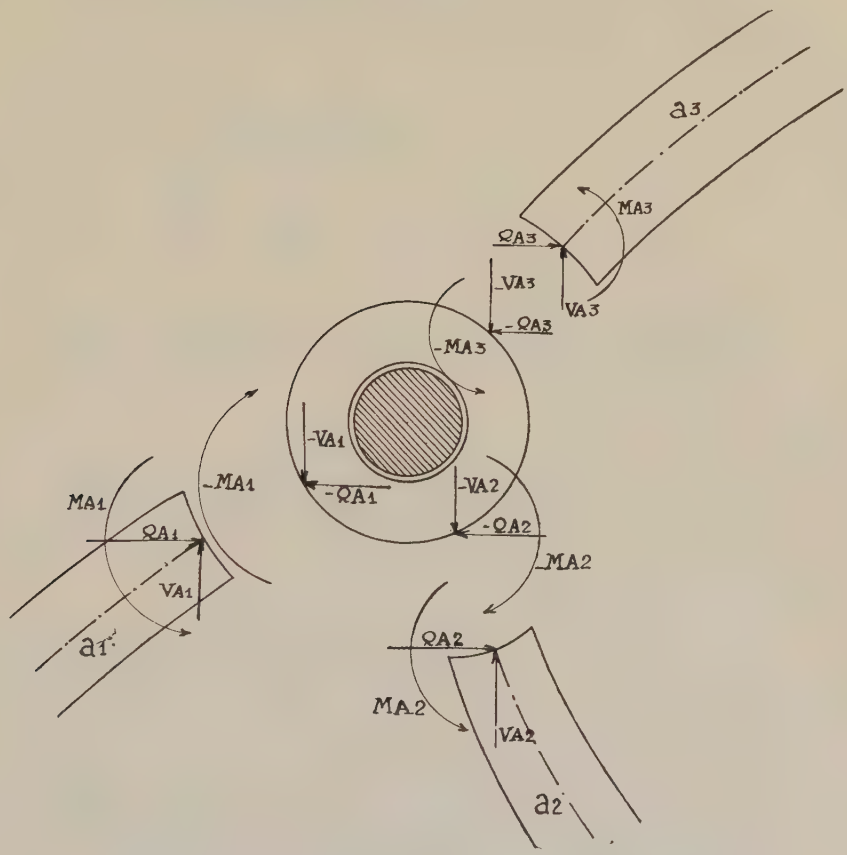


Fig. 57.

La force de liaison exercée par la broche sur la construction est donc la somme géométrique de Ha_1, Va_1, Ha_2, Va_2, Ha_3, Va_3.

3° Variations angulaires aux rotules.

42. — Soit l'arc qui joint les deux appuis auxiliaires A et B (fig. 58) ; on peut le considérer comme ayant à chaque extrémité un appui à rotules en le soumettant aux couples inconnus M_a, M_b et à la charge donnée F (A. B.).

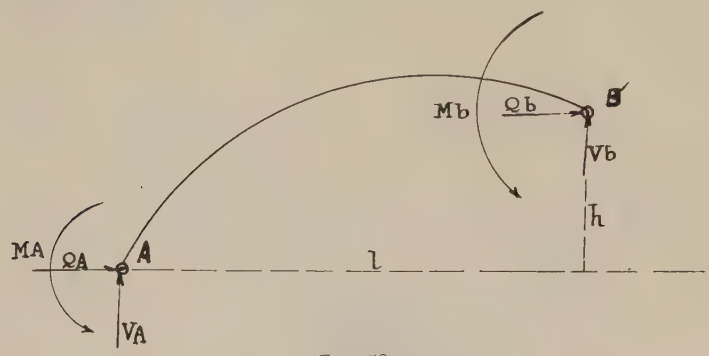


Fig. 58.

En vertu du principe de superposition qui s'applique aux liaisons surabondantes, on a :

$$\Omega_a = K_{aa}M_a + K_{ab}M_b + \omega_a,$$
$$\Omega_b = K_{ba}M_a + K_{bb}M_b + \omega_b.$$

ω_a et ω_b sont les valeurs de Ω_a et Ω_b pour l'arc soumis uniquement aux charges données, K_{aa} est la valeur de Ω_a pour l'arc à deux rotules soumis exclusivement à un moment $M_a = 1$; K_{ab} est pareillement la valeur de Ω_a quand l'arc est exclusivement soumis à $M_b = 1$.

K_{ba} et K_{bb}, dans de pareilles conditions, sont les déplacements angulaires Ω_b respectifs pour $M_a = 1$ et $M_b = 1$.

Les coefficients K ne dépendent que de la forme et de la nature des matériaux constitutifs de l'arc.

On les détermine en utilisant les formules de Bresse et le plus simple est de supposer que l'on applique M_a et M_b à l'exclusion des charges données.

Soit l'arc représenté par la figure 58 ; la statique nous donne :

$$Q_a + Q_b = 0, \qquad V_a + V_b = 0,$$
$$M_a + M_b - lV_a + hQ_a = 0.$$

On a, en outre :

$$\Omega_a = \frac{1}{h}\int \frac{M}{EI}(h-y)\,ds = \frac{1}{l}\int \frac{M}{EI}(l-x)\,ds, \qquad \Omega_b - \Omega_a = -\int \frac{M\,ds}{EI},$$

ce qui représente 6 équations pour les 8 inconnues :

$$M_a,\ Q_a,\ V_a,\ M_b,\ Q_b,\ V_b,\ \Omega_a,\ \Omega_b,$$

que l'on devra donc exprimer en fonction de deux d'entre elles ; de M_a et M_b, par exemple.

4° Coefficients de proportionnalité et foyers.

a) *Arcs continus* (fig. 59).

43. — Les calculs des coefficients de proportionnalité et des foyers d'un arc continu est en quelque sorte la géné-

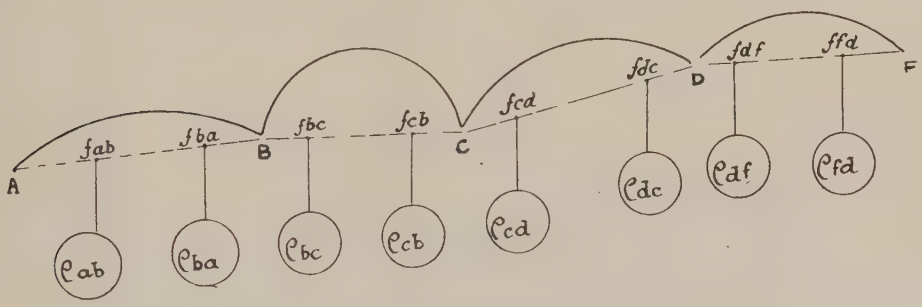


Fig. 59

ralisation de la théorie classique des foyers de la poutre droite continue.

Prenons un arc continu dont le premier appui est à rotules, les travées n'étant pas chargées, nous avons $M_a = 0$.

Les variations angulaires aux appuis successifs sont onnés par les expressions que nous savons calculer :

$$1^{er}\text{ arc}\ \begin{cases} \Omega_a = K_{ab}M_b, \\ \Omega_b = K_{bb}M_b. \end{cases}$$

$$2^{e}\text{ arc}\ \begin{cases} \Omega_b = K'_{bb}M_b + K_{bc}M_c, \\ \Omega_c = K_{cb}M_b + K_{cc}M_c. \end{cases}$$

$$3^{e}\text{ arc}\ \begin{cases} \Omega_c = K'_{cc}M_c + K_{cd}M_d, \\ \Omega_d = K_{dc}M_c + K_{dd}M_d, \end{cases}$$

d'où nous pouvons écrire :

$$K_{bb}M_b = K'_{bb}M_b + K_{bc}M_c \qquad (1)$$
$$K_{cb}M_b + K_{cc}M_c = K'_{cc}M_c + K_{cd}M_d. \qquad (2)$$

Ces équations étant homogènes, elles nous permettent d'avoir : $\frac{M_c}{M_b}, \frac{M_d}{M_b},$

ou bien, ce qui revient au même : $\frac{M_b}{M_d}, \frac{M_c}{M_d}$.....

qui s'expriment au moyen des coefficients K et l'on peut poser :

$$\frac{M_b}{M_c} = \rho_{bc}, \qquad \frac{M_c}{M_d} = \rho_{cd}.$$

Ces valeurs de ρ se calculent de proche en proche en partant du premier appui ; celui-ci, par exemple, étant à rotules, on tire de (1) :

$$(K_{bb} - K'_{bb})\frac{M_b}{M_c} = K_{bc},$$

soit :

$$\rho_{bc} = \frac{K_{bc}}{K_{bb} - K'_{bb}}.$$

Pour ρ_{cd}, on a :

$$K_{cb}\frac{M_b}{M_c} + K_{cc} = K'_{cc} + K_{cd}\frac{M_d}{M_c},$$

c'est-à-dire :

$$K_{cb}\rho_{bc} + K_{cc} = K'_{cc} + \frac{K_{cd}}{\rho_{cd}}.$$

44. — *Remarque.* — Si au premier appui existe un moment, l'angle correspondant est :

$$\Omega_a = K_{aa}M_a + K_{ab}M_b$$

et s'il est à encastrement, on a l'expression :

$$K_{aa}M_a + K_{ab}M_b = 0,$$

d'où :

$$\rho_{ab} = \frac{M_a}{M_b} = -\frac{K_{ab}}{K_{aa}}.$$

45. — Tous ces coefficients sont des constantes.

46. — La connaissance de ces coefficients de proportionnalité entre les moments successifs aux appuis quand les travées ne sont pas chargées est suffisante pour nos calculs.

47. — Par analogie aux poutres continues non chargées, si on représente les moments aux appuis par des longueurs proportionnelles perpendiculaires à la droite réunissant ceux-ci, si on réunit leurs extrémités par des droites, elles rencontrent celles qui joignent les appuis en des points fixes comme il en est pour les foyers des poutres continues, et ces points fixes sont situés au voisinage des appuis, soit à la droite, soit à la gauche de ceux-ci (fig. 59).

Ce sont les séries de foyers de droite et séries des

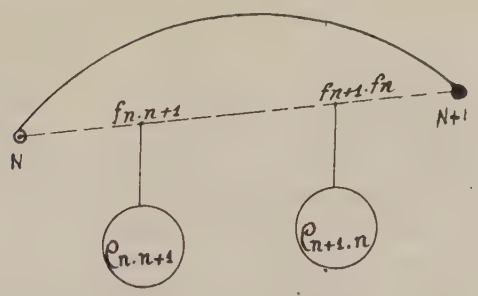


Fig. 60.

foyers de gauche qui correspondent aux coefficients de proportionnalité de droite et de gauche (fig. 60).

48. — Pour une travée de rang n, où les appuis sont A_n et A_{n+1}, les coefficients de proportionnalité seront pour cette travée, désignés par $\rho_{n+1.n}$ pour celui de la série de droite et par $\rho_{n.n+1}$ pour celui de la série de gauche (fig. 60).

b) *Constructions continues à un étage.*

49. — Soit la construction continue à un étage représentée par la figure 61 ; comme précédemment, nous pouvons calculer les déplacements angulaires dus aux mo-

ments qui existent aux appuis des différents arcs, appuis auxiliaires et de repos et écrire :

$$\Omega_{a_0} = K_{a_0 \cdot a_0} M_{a_0} + K_{a_0 b_1} M_{b_1 a_0}, \quad (1)$$
$$\Omega_{b_0} = K_{b_0 \cdot b_0} M_{b_0} + K_{b_0 \cdot b_1} M_{b_1 b_0}, \quad (2)$$
$$\Omega_{b_1 a_0} = K_{b_1 \cdot b_1 a_0} M_{b_1 a_0} + K_{b_1 a_0} M_{a_0}, \quad (3)$$
$$\Omega_{b_1 b_0} = K_{b_1 b_1 b_0} M_{b_1 b_0} + K_{b_1 b_0} M_{b_0}, \quad (4)$$
$$\Omega_{b_1 c_1} = K_{b_1 b_1 c_1} M_{b_1 c_1} + K_{b_1 c_1 b_1} M_{c_1 b_1}. \quad (5)$$

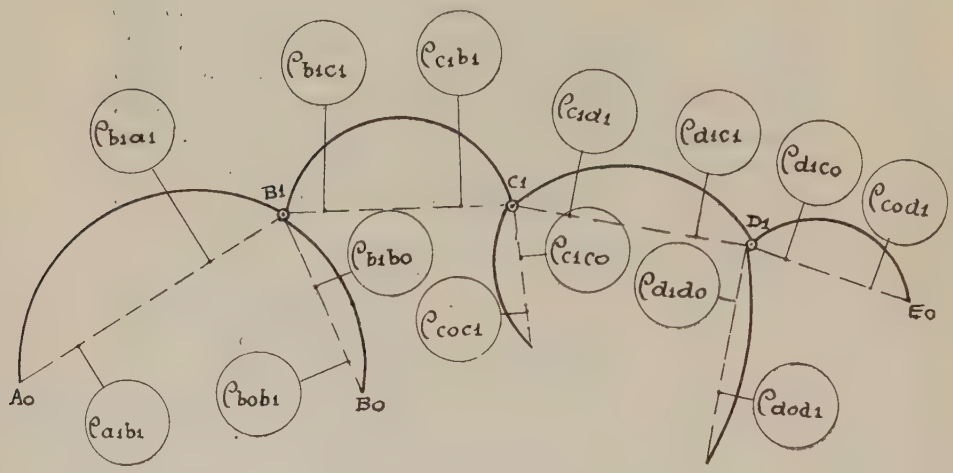


Fig. 61.

En faisant l'hypothèse que les appuis de repos sont à encastrement, on a pour l'arc A_0B_1 :

$$K_{a_0 \cdot a_0} M_{a_0} + K_{a_0 b_1} M_{b_1 a_0} = 0,$$

ce qui donne la valeur du coefficient de proportionnalité :

$$\rho_{a_0 b_1} = \frac{M_{a_0}}{M_{b_1 a_0}} = -\frac{K_{a_0 b_1}}{K_{a_0} \cdot a_0},$$

de même pour l'arc B_0B_1 :

$$K_{b_0 b_0} M_{b_0} + K_{b_0 b_1} M_{b_1 b_0} = 0,$$

d'où :

$$\rho_{b_0 b_1} = \frac{M_{b_0}}{M_{b_1 b_0}} = -\frac{K_{b_0 b_1}}{K_{b_0 b_0}}.$$

Nous avons d'autre part :

$$\Omega_{b_1a_0} = \Omega_{b_1b_0} = \Omega_{b_1c_1}, \tag{6}$$

ainsi que :

$$M_{b_1a_0} + M_{b_1b_0} = M_{b_1c_1}. \tag{7}$$

L'équation (6) peut s'écrire :

$$(K_{b_1b_1a_0} + K_{b_1a_0}\,\rho_{a_0b_1})\,M_{b_1a_0} = (K_{b_1b_1b_0} + K_{b_1b_0}\rho_{b_0b_1})\,M_{b_1b_0}$$
$$= \left(K_{b_1b_1c} + \frac{K_{b_1c_1b_1}}{\rho_{b_1c_1}}\right) M_{b_1c_1}.$$

En tirant $M_{b_1a_0}$ et $M_{b_1b_0}$ de ces expressions en fonction de $M_{b_1c_1}$, en les transportant dans l'équation (7), on trouve $M_{b_1c_1}$ facteur commun dans les deux membres et on a ainsi une relation dans laquelle $\rho_{b_1c_1}$ est seul comme inconnu.

Connaissant $\rho_{b_1c_1}$ et $\rho_{c_0c_1}$, on aura pareillement $\rho_{c_1d_1}$ et ainsi de suite.

Comme pour l'arc continu à plusieurs appuis, il y aura deux séries de coefficients de proportionnalité, l'une de gauche et l'autre de droite, correspondantes aux deux séries de points fixes situés sur les droites joignant les appuis de façon analogue aux foyers de poutres droites continues reposant sur plusieurs appuis (voir plus loin des exemples de calculs aux formules usuelles et aux applications numériques).

c) *Constructions complexes.*

50. — Dans un arc continu à plusieurs travées, on observe que la valeur du coefficient de proportionnalité de l'un d'eux, $\rho_{n-1.n}$ de l'arc de rang n, par exemple, calculé comme si l'appui $p-1$ de l'arc de rang p était à rotule, diffère d'autant moins de la valeur obtenue en considérant cet appui $p-1$ comme étant à encastrement, que cet appui $p-1$ est plus éloigné de l'appui $n-1$.

51. — Cette remarque nous a mis sur la solution de la recherche par approximations successives des coefficients de proportionnalité des constructions complexes.

En effet, soit l'arc D_nE_n de l'une d'elles (fig. 62), dont nous voulons obtenir le coefficient $\rho_{D_nE_n}$ de la série de gauche.

Pour cela, nous déterminons les coefficients de proportionnalité des arcs $D_{n+1}D_n$, C_nD_n, $D_{n-1}D_n$, en supposant que ces arcs sont encastrés aux appuis D_{n+1}, C_n, D_{n-1}, et nous calculons avec la demi-valeur de chacun des coefficients correspondants, ce qui revient à prendre la moyenne entre les coefficients pour encastrements et

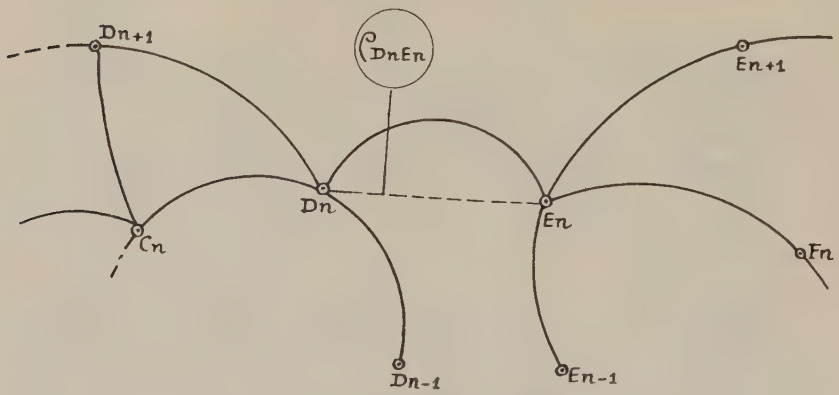


Fig. 62.

ceux pour rotules, ces derniers étant nuls. Nous procédons de cette manière pour tous les arcs, tant pour les coefficients de la série de gauche que pour ceux de la série de droite.

Nous obtenons ainsi une première approximation.

Nous recommençons à nouveau avec tous ces coefficients les mêmes opérations que nous venons de faire, et généralement un troisième calcul donne des résultats tellement voisins de ceux du deuxième, qu'il est possible de se contenter des résultats du deuxième calcul.

(Voir les calculs des applications pratiques.)

5° Coefficients angulaires des rotules.

52. — Soit une rotule O (fig. 63); on sait que si les arcs AO, BO, CO, DO, ne sont pas chargés, les variations

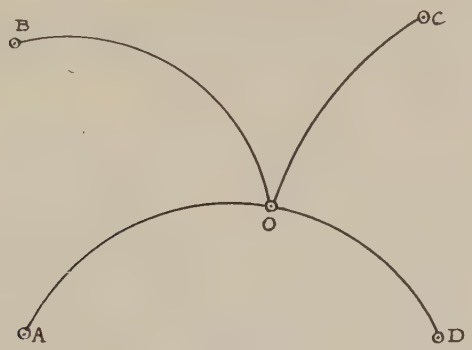


Fig. 63.

angulaires s'expriment pour chaque branche par les expressions :

$$\Omega O_A = K_{o.oa} MO_A + K_{o.ao} MA_0,$$
$$\Omega O_B = K_{o.ob} MO_B + K_{o.bo} MB_0,$$
$$\Omega O_C = K_{o.oc} MO_C + K_{o.co} MC_0,$$
$$\Omega O_D = K_{o.od} MO_D + K_{o.do} MD_0.$$

On sait, en outre, que pour chacun des arcs il existe un coefficient de proportionnalité tel qu'il nous est possible d'écrire :

$$MA_0 = \rho_{AO} MO_A,$$
$$MB_0 = \rho_{BO} MO_B,$$
$$MC_0 = \rho_{CO} MO_C,$$
$$MD_0 = \rho_{DO} MO_D.$$

Nous avons de ce fait par substitution de ces valeurs dans les quatre premières relations :

$$\Omega O_A = (K_{o.oa} + K_{o.ao}\rho_{AO}) MO_A,$$
$$\Omega O_B = (K_{o.ob} + K_{o.bo}\rho_{BO}) MO_B,$$
$$\Omega O_C = (K_{o.oc} + K_{o.co}\rho_{CO}) MO_C,$$
$$\Omega O_D = (K_{o.od} + K_{o.do}\rho_{DO}) MO_D.$$

Les nombres entre parenthèses sont des constantes que nous désignons par i_{oa}, i_{ob}, i_{oc}, i_{od}, et qui sont respecti-

vement afférentes aux branches aboutissant à la rotule O (fig. 63).

Calculés une fois pour toutes et à l'avance, ces nombres permettent de répartir très rapidement un moment autour d'un nœud.

Supposons, par exemple, que la branche A_0 soit chargée et que les autres BO, CO, DO soient vides, et qu'on connaisse le moment MO_A correspondant, on a d'une part :

$$i_{ob}MO_B = i_{oc}MO_C = i_{od}MO_D\,; \qquad (1)$$

et, d'autre part .

$$MO_A = MO_B + MO_C + MO_D. \qquad (2)$$

En calculant MO_B et MO_C en fonction de MO_D, on a la relation :

$$MO_A = \left(\frac{i_{od}}{i_{ob}} + \frac{i_{od}}{i_{oc}} + 1\right) MO_D\,;$$

d'où MO_D, MO_B et MO_C en fonction de MO_A.

53. — Un autre problème, facilité par la connaissance de ces nombres, est celui de la répartition d'un moment incident μ appliqué à l'œillet de l'appui auxiliaire O. La solution du problème est la même, mais l'expression devient :

$$MO_A + MO_B + MO_C + MO_D = \mu.$$

6° Charges quelconques entre deux appuis auxiliaires.

54. — Le problème à résoudre est celui de la construction donnée, complètement déchargée et soumise uniquement aux charges agissant sur un arc réunissant deux appuis auxiliaires.

Nous pouvons procéder de deux façons différentes en partant de l'arc à rotules ou bien d'un arc à deux encastrements :

1° Soit un arc d'une construction complexe (fig. 64), les calculs pour la recherche des coefficients de proportionnalité nous ont donné les variations angulaires :

$$\Omega_A = K_{aa}M_a + K_{ab}M_b,$$
$$\Omega_B = K_{ba}M_b + K_{bb}M_b.$$

Nous connaissons aussi, d'autre part, les constantes de répartition autour des rotules :

$$i_{a\alpha_1}, \quad i_{a\alpha_2}, \quad i_{a\alpha_3}, \quad i_{a\alpha_4},$$
$$i_{b\beta_1}, \quad i_{b\beta_2}, \quad i_{a\beta_3}, \quad i_{b\beta_4}.$$

Nous déterminerons tout d'abord ω_a et ω_b correspondants aux déplacements angulaires des appuis A et B de

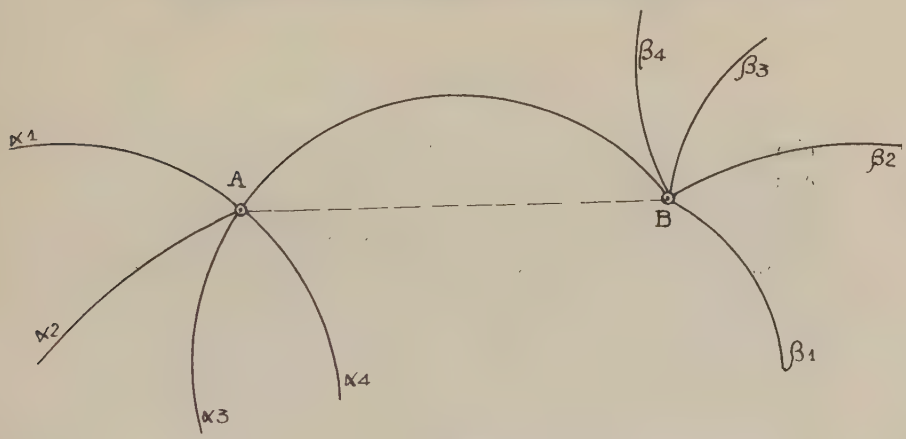


Fig. 64.

l'arc, celui-ci étant considéré comme isolé du reste de la construction, soumis uniquement aux charges données qui agissent sur lui et ayant des appuis à rotules.

Supposons que M_a soit connu, répartissons ce moment entre les branches $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, on a ainsi pour la branche α_1 un moment $M_a K_{\alpha_1}$, correspondant à un angle $M_a K_{\alpha_1} i_{a\alpha_1}$; procédons de même pour M_b avec $M_b K_{\beta_1}$ pour la branche β_1 et l'angle correspondant $M_b K_{\beta_1} i_{b\beta_1}$, ce qui permet d'écrire :

$$M_a K_{\alpha_1} i_{a\alpha_1} = K_{aa} M_a + K_{ab} M_b + \omega_a,$$
$$M_a K_{\beta_1} i_{b\beta_1} = K_{ba} M_a + K_{bb} M_b + \omega_b,$$

soit deux équations pour les moments M_a et M_b.

55. — 2° La deuxième solution consiste à supposer qu'en chacun des appuis auxiliaires A et B, il s'en trouve un autre infiniment voisin, mais qui ne se confond toutefois pas avec ceux-ci ; autrement dit, on a affaire en A et B à des encastrements auxiliaires (fig. 65).

On calcule l'arc AB comme encastré en A et B, et soumis aux charges qui agissent sur lui ; on revient ensuite à la construction donnée avec les appuis auxiliaires, et en

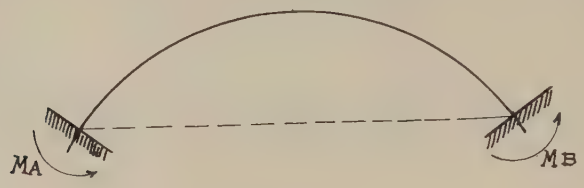


Fig. 65.

chacun d'eux A et B, on applique respectivement les couples $-M_a$ et $-M_b$ (fig. 66).

On additionne les trois résultats obtenus, et d'après le principe de superposition, on a les moments cherchés.

Quelle que soit la méthode choisie, on doit procéder

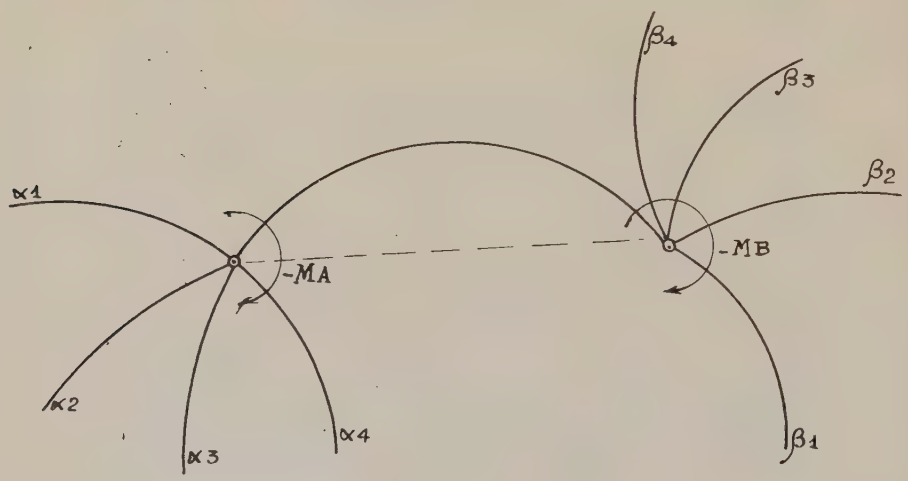


Fig. 66.

successivement par travée uniquement chargée, et ajouter tous les efforts obtenus pour chacune d'elles.

56. — On remarquera que pour la méthode des encastrements auxiliaires, qu'ayant opéré pour chaque travée avec deux encastrements, on aura en chacun des appuis une seule répartition à effectuer, n'ayant à s'occuper que de la différence des deux encastrements adjacents.

Cette manière de faire est plus courte que la première, puisqu'il n'y a pas à remonter aux calculs préliminaires, et qu'il n'y a pas de systèmes d'équation à deux inconnues à résoudre.

B. — *EFFETS DES RÉACTIONS SUR LES CONSTRUCTIONS A L'ÉTAT NATUREL*

1° Méthode directe.

57. — La méthode exposée dans la première partie de ce travail est évidemment applicable pour trouver les réactions des appuis des constructions, les moments de flexions aux différents points de leurs fibres moyennes, ainsi que les déplacements élastiques dus aux effets des réactions des appuis auxiliaires à rotules sur les constructions prises à l'état naturel : dans certains cas, elle sera toutefois avantageusement remplacée par celles que nous donnons ci-après.

2° Méthode des déplacements des nœuds.

58. — La méthode des déplacements des nœuds n'est employée que lorsque chacun des nœuds peut être déplacé dans l'espace, tous les autres assujettis à rester fixes, et aux emplacements desquels existent des appuis auxiliaires à rotule.

a) *Préliminaires.*

59. — Soit une partie de construction à appuis auxiliaires à rotule, représentée par la figure 67, dans laquelle nous déplaçons l'œillet N à l'aide de sa broche, que nous fixons en N′, les autres appuis auxiliaires à rotule restant en place, leurs œillets ayant uniquement la possibilité de tourner sans frottement autour de leurs broches respectives.

Désignons par Δx et Δy les composantes horizontales et verticales du déplacement de N en N′, et par Ω la variation angulaire de l'œillet N autour de sa broche, pendant cette opération.

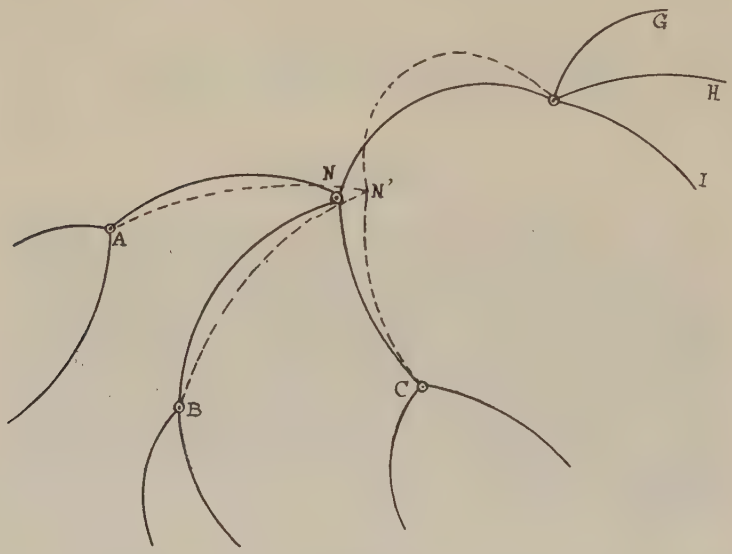


Fig. 67.

Pour un arc ND quelconque, les premiers membres des formules de Bresse sont :

$$\Delta x_D - \Delta x_N,$$
$$Dy_D - \Delta y_N,$$
$$\Omega_{DN} - \Omega_{ND},$$

et, comme on le sait, les seconds sont des fonctions du premier degré de M_{ND}, Q_{ND} et V_{ND}, actions de l'œillet N sur le dit arc et de Ω_{DN} pour les deux premières expressions.

Nous remarquons que la broche de l'œillet D reste immobile, et que $\Delta x_D - \Delta x_N$ n'est autre que Δx, et pareillement $\Delta y_D - \Delta y_N$ correspond à Δy.

Par contre, $\Omega_{DN} - \Omega_{ND}$ est bien aussi une fonction de M_{ND}, Q_{ND} et V_{ND}, mais nous ignorons la valeur de Ω_{DN}, que nous nous proposons aussi d'établir en fonction de M_{ND}, Q_{ND} et V_{ND}.

Nous observons que le moment en D, sur l'arc ND,

c'est-à-dire M_{DN}, est bien une fonction du premier degré de M_{ND}, Q_{ND} et V_{ND}.

Nous admettons que les coefficients angulaires i_{dg}, i_{dh}, i_{di} autour de la rotule D ont été établis, et nous savons calculer M_{DG}, M_{DH} et M_{DI} en fonction de M_{DN}, et conséquemment en fonction de M_{ND}, Q_{ND} et V_{ND} par définition, nous avons :

$$\Omega_{DN} = M_{DG} i_{dg} = M_{DH} i_{dh} = M_{DI} i_{di} ;$$

en prenant l'une quelconque de ces expressions, la première, on a $\Omega_{DN} = M_{DG} i_{dg}$, qui est bien une fonction de M_{ND}, Q_{ND} et V_{ND}.

L'expression $\Omega_{DN} - \Omega_{ND}$ étant elle-même une fonction de ces inconnues, il en résulte que Ω_{ND} en sera bien une aussi :

Pour l'arc ND, nous pouvons donc écrire les déplacements en question sous les formes générales :

$$\Delta x = f_{xd}(M_d, Q_d, V_d),$$
$$\Delta y = f_{yd}(M_d, Q_d, V_d),$$
$$\Omega = f_{\omega d}(M_d, Q_d, V_d).$$

Comme Δx, Δy et Ω sont identiques pour tous les arcs, nous avons les équations suivantes :

$$\overset{(1)}{f_{xa}(M_a, Q_a, V_a)} = \overset{(2)}{f_{xb}(M_b, Q_b, V_b)} = \overset{(3)}{f_{xc}(M_c, Q_c, V_c)} = f_{xd}(M_d, Q_d, V_d),$$
$$\overset{(4)}{f_{ya}(M_a, Q_a, V_a)} = \overset{(5)}{f_{yb}(M_b, Q_b, V_b)} = \overset{(6)}{f_{yc}(M_c, Q_c, V_c)} = f_{yd}(M_d, Q_d, V_d),$$
$$\overset{(7)}{f_{\omega a}(M_a, Q_a, V_a)} = \overset{(8)}{f_{\omega b}(M_b, Q_b, V_b)} = \overset{(9)}{f_{\omega c}(M_c, Q_c, V_c)} = f_{\omega d}(M_d, Q_d, V_d).$$

Désignons par X la composante horizontale de la réaction de la broche N, nous avons :

$$Q_a + Q_b + Q_c + Q_d = X, \qquad (10)$$

puis, par Y, sa composante verticale, ce qui donne pareillement :

$$V_a + V_b + V_c + V_d = Y. \qquad (11)$$

D'autre part, les moments d'équilibre sur l'œillet sont :

$$M_a + M_b + M_c + M_d = 0. \qquad (12)$$

Soient donc 12 équations par 14 inconnues ; on pourra donc exprimer 12 d'entre elles en fonction de deux quelconques : M_a et M_b, par exemple.

De plus, si on déplace la broche de N en N′ sous l'action d'un effort F faisant un angle α avec l'horizontale, on aura :

$$X = Q_a + Q_b + Q_c + Q_d = F \cos \alpha, \qquad (10')$$
$$Y = V_a + V_b + V_c + V_d = F \sin \alpha, \qquad (11')$$

d'où M_a et M_b en fonction de F.

b) *Exposé de la méthode.*

60. — Soit la construction, figure 68, soumise uniquement à l'action de deux forces F_{B_1} et F_{C_1} quelconques agissant

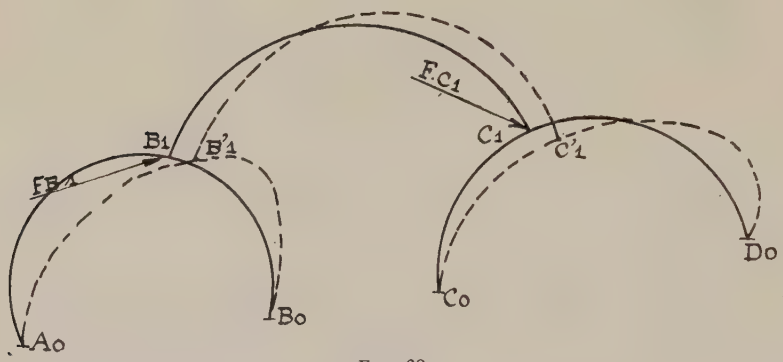


Fig. 68.

respectivement aux nœuds B_1 et C_1 ; sous leur action B_1 se déplace en B'_1 et C_1 en C'_1.

Nous nous proposons de calculer les moments relatifs à chacune des branches qui aboutissent aux points B_1 et C_1.

Plaçons des appuis auxiliaires à rotules en B_1 et C_1, et tout en laissant l'appui C_1 immobile, amenons B_1 à occuper la position B'_1 (fig. 69) ; nous fixons ce nœud sous forme d'appui à rotule, et nous amenons ensuite la broche de l'appui C_1 à occuper la position C'_1 (fig. 70).

La construction occupe ainsi dans l'espace la position qu'elle a sous l'action des forces F_{B_1} et F_{C_1} (fig. 68).

Nous venons de voir (§ 59) que pour le premier déplacement, l'action de la broche B_1 peut être représentée par ses deux composantes horizontale et verticale $X_{b_1b_1}$, $Y_{b_1b_1}$

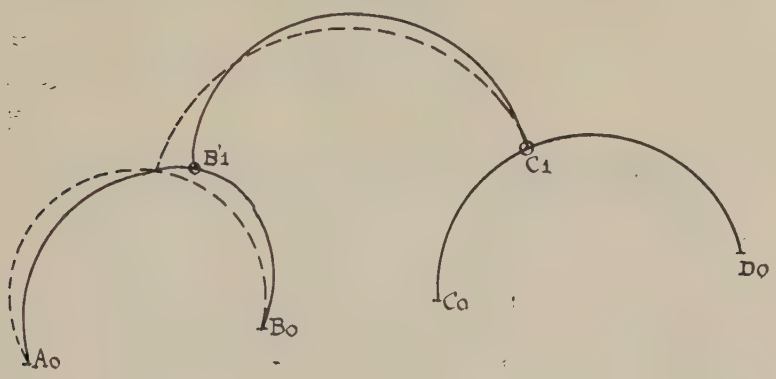


Fig. 69.

en fonction de deux moments $M_{b_1a_0}$, $M_{b_1b_0}$, tandis que la réaction de la broche immobile en C_1 aura deux composantes $X_{c_1b_1}$ et $Y_{c_1b_1}$, exprimées pareillement en fonction de ces deux moments élémentaires $M_{b_1a_0}$ et $M_{b_1b_0}$.

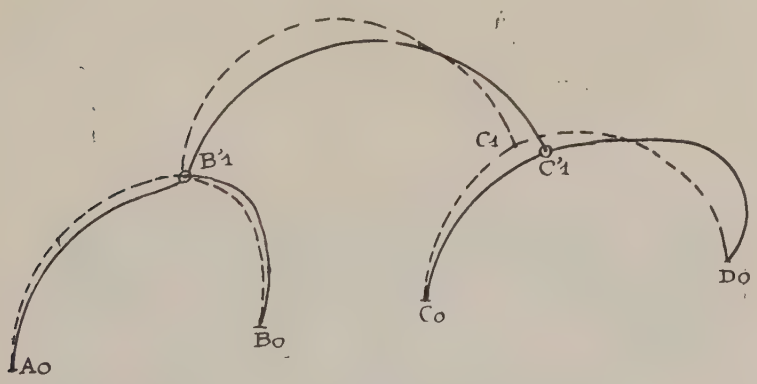


Fig. 70.

Pour le deuxième déplacement, l'action de la broche C_1 déplacée a ses deux composantes $X_{c_1c_1}$, $Y_{c_1c_1}$, en fonction de deux moments élémentaires $M_{c_1c_0}$ et $M_{c_1d_0}$, tandis que les réactions correspondantes de la broche immobile B_1

auront ainsi leurs composantes $X_{b_1c_1}$ et $Y_{b_1c_1}$ en fonction de ces moments élémentaires.

Les actions des broches après ces deux déplacements successifs auront finalement pour expressions :

$$X_{B1} = X_{b_1b_1} + X_{b_1c_1},$$
$$Y_{B1} = Y_{b_1b_1} + Y_{b_1c_1},$$
$$X_{C1} = X_{c_1b_1} + X_{c_1c_1},$$
$$Y_{C1} = Y_{c_1b_1} + Y_{c_1c_1}.$$

Les déformations étant les mêmes que celles qui auraient été occasionnées par les mêmes forces F_{b_1} et F_{c_1}, on a donc :

$$F_{B1} \cos \alpha_b = X_{B1},$$
$$F_{B1} \sin \alpha_b = Y_{B1},$$
$$F_{C1} \cos \alpha_c = X_{C1},$$
$$F_{C1} \sin \alpha_c = Y_{C1},$$

soit quatre équations à quatre inconnues.

On voit donc que pour une construction complexe dont les nœuds peuvent se déplaçer les uns par rapport aux autres on peut calculer les moments de flexion en chacun des points de la fibre moyenne en procédant par déplacements successifs.

Pour une construction à un nœud on aura un système de deux équations à deux inconnues ; pour deux nœuds, quatre équations à 4 inconnues, et généralement pour n nœuds $2n$ équations pour $2n$ inconnues.

Remarque.

61. — Comme pour la détermination des coefficients de proportionnalité, on remarque que seul un certain nombre de déplacements de broches voisines est à considérer, car les plus éloignés ne provoquent que des réactions négligeables.

3° Méthode de déplacements successifs.

a) *Déplacements réels.*

62. — Soit un cadre rectangulaire à deux appuis représenté par la figure 71 et auquel est appliqué en 2 une

force horizontale F ; sous son action le cadre prendra une déformation que nous représentons par la figure 72.

Le point 2 étant venu en 2′ de même que 3 en 3′ et les déplacements sont tels que $2 - 2' = 3 - 3' = \lambda$.

Il est entendu que l'on ne tient pas compte des déformations de la fibre moyenne sous l'action des forces qui agissent suivant sa direction.

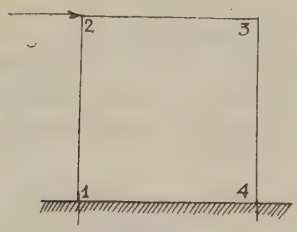


Fig. 71.

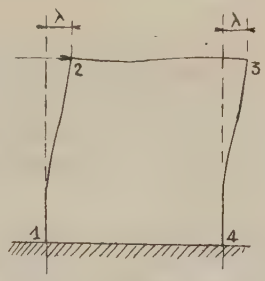


Fig. 72.

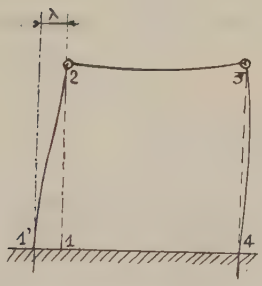


Fig. 73.

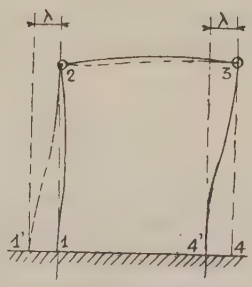


Fig. 74.

D'après le principe de superposition, la déformation de la figure 72 peut être regardée comme produite par deux déformations successives d'une même construction pourvue d'appuis auxiliaires en 2 et 3.

La première déformation se produit par le déplacement de 1 en 1′ d'une longueur λ (fig. 73), tous les moments étant exprimés en fonction d'un seul m_1 (fig. 74).

Le deuxième déplacement de 4 en 4′, d'une même longueur λ, tous les moments étant exprimés en fonction d'un seul p_4.

λ étant identique pour les deux déplacements successifs

il en résulte que p_1 peut être exprimé en fonction de m_1 ainsi que les réactions des rotules.

Les actions des broches ont des composantes verticales qui sont sans influence sur les déformations puisqu'elles sont équilibrées par les montants verticaux et que par hypothèse on néglige les déformations sous l'action des forces agissant suivant la direction de la fibre moyenne.

Les composantes horizontales peuvent donc être considérées comme les causes de la déformation.

En vertu de la même hypothèse plusieurs forces agissant sur un élément rectiligne et ayant la même direction peuvent être transportées en un point quelconque de celui-ci.

Les actions horizontales exprimées en fonction de m agissant en 2 et 3 peuvent donc être transportées en 2 ; leur somme produisant les mêmes effets que la force F donnée, elle lui est donc équivalente d'où m, en fonction de son intensité, et par suite de même tous les moments de flexion et réaction des appuis.

b) *Déplacements virtuels.*

63. — Soit un portique à deux étages représenté par la figure 75 et soumis à deux forces horizontales F_1 et F_2 respectivement appliquées en A_1 et A_2.

Ces forces provoquent une déformation qui est donnée schématiquement par la figure 76.

D'après le principe de superposition, cette déformation peut être regardée comme le résultat d'autres successives, cette construction étant pourvue d'appuis auxiliaires en $A_1A_2B_2B_1$.

1° Les appuis auxiliaires à rotules $A_1A_2B_1B_2$ restant fixes, une déformation pour un premier déplacement d'ensemble (fig. 77) des appuis A_0 et B_0 venant en A'_0 et B'_0 et tel que $A'_0A_0 = B'_0B_0 = \lambda_1$.

2° Les appuis ordinaires A_0 et B_0 et auxiliaires A_1 et B_1 restant fixes, un ensemble de déformations dû au déplacement λ_2 de la traverse, A_2B_2 (fig. 78). C'est ce déplacement réel que nous pouvons regarder comme

la résultante de deux déplacements virtuels successifs.

Nous savons que si dans une poutre continue à plusieurs travées on provoque le déplacement relatif de deux appuis d'une même travée, les moments développés au droit de chacun des appuis considérés sont dans le rapport de dis-

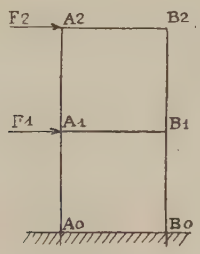


Fig. 75.

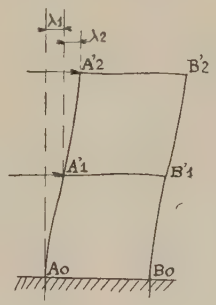


Fig. 76.

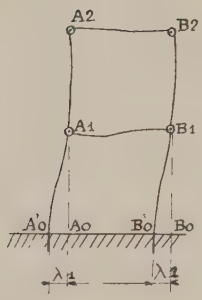


Fig. 77.

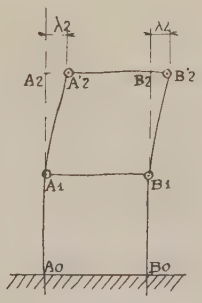


Fig. 78.

tances de ceux-ci aux foyers de cette même travée qui leur sont le plus voisins.

Nous savons en outre calculer ces moments en fonction de cette dénivellation.

Supposons que A_2 se déplace virtuellement par rapport à A_1 d'une longueur λ_2 et calculons tous les moments et réactions qui en résultent, en fonction d'un seul M_{a1}, par exemple.

Supposons pareillement un déplacement virtuel iden-

tique λ_2 du point B_2 pour lequel nous établissons tous les moments et réactions en fonction de M_{b1} par exemple ; M_{a1} et M_{b1} étant calculés en fonction de λ_2, nous avons M_{b2} en fonction de M_{a1}, et par suite en ajoutant les moments et réactions des deux déformations virtuelles successives, nous avons la deuxième déformation réelle d'ensemble en fonction d'un seul moment M_{a1}.

Dans ces opérations les réactions des broches sont toutes exprimées en fonction des moments M_{a1} et M_{b1}, leurs composantes horizontales pareillement ; celles-ci provoquent les mêmes déformations que F_1 et F_2.

La somme des composantes agissant sur la traverse A_1B_1 est égale à F_1, tandis que celles qui agissent sur la traverse A_2B_2 ont une somme égale à F_2.

Nous avons ainsi deux équations pour les deux inconnues M_{a1} et M_{b1} et par suite tous les moments de flexion et réactions des appuis ordinaires en fonction des deux forces données.

64. — *Remarque 1.* — Dans la méthode des déplacements successifs on pourra aussi faire emploi d'encastrements auxiliaires, subtitués aux appuis auxiliaires à rotules, et reprendre ensuite la construction pourvue à nouveau de ces derniers et leur appliquer des couples incidents de sens inverses aux moments d'encastrements qui existaient à leurs emplacements.

65. — *Remarque 2.* — La méthode des déplacements virtuels permet d'aborder l'étude des constructions ordinaires à un nombre considérable d'étages et plus particulièrement l'action que le vent exerce sur elles.

On opère successivement étage par étage et on a autant d'inconnues qu'il y a d'étages, mais on remarque que pour une force F, relative à un plancher, les expressions de celle-ci ne contiennent plus de termes afférents aux étages $n + p$ et $n - p$ pour une valeur déterminée de p.

On a affaire à des équations à gradins dont la résolution est facile.

Soit, par exemple, la construction à 15 étages donnée par la figure 79, soumise aux forces horizontales F_1, F_2, F_3... F_{15} qui résultent de l'action du vent et appliquées au droit des planchers.

La déformation totale peut être envisagée comme 15 déformations successives d'une construction pourvue d'appuis auxiliaires à rotules dont nous savons calculer les moments élémentaires correspondants, ainsi que les réactions des broches.

Soit *a. b. c. d... m. n. o.* les moments élémentaires des étages.

Pour le calcul des réactions des broches d'un plancher il sera largement suffisant de prendre en considération les moments élémentaires des trois étages au-dessus et des trois étages au-dessous de lui.

Les sommes des réactions horizontales des broches forment un système équivalent avec les forces $F_1, F_2, F_3 \ldots$ F_{15} et nous avons pour chacun des termes qui contiennent les inconnues, les fonctions du premier degré ci-après :

$F_{15} = f.\ (o,\ m,\ n.)$
$F_{14} = f.\ (o,\ m,\ n,\ l.)$
$F_{13} = f.\ (o,\ m,\ n,\ l,\ k.)$
$F_{12} = f.\ (o,\ m,\ n,\ l,\ k,\ j.)$
$F_{11} = f.\ (\quad m,\ n,\ l,\ k,\ j,\ i.)$
$F_{10} = f.\ (\ldots\ n,\ l,\ k,\ j,\ i,\ h.)$
$F_{9} = f.\ (\ldots\ l,\ k,\ j,\ i,\ h,\ g.)$
$F_{8} = f.\ (\ldots\ k,\ j,\ i,\ h,\ g,\ f.)$
$F_{7} = f.\ (\ldots\ j,\ i,\ h,\ g,\ f,\ e.)$
$F_{6} = f.\ (\ldots\ i,\ h,\ g,\ f,\ e,\ d.)$
$F_{5} = f.\ (\ldots\ h,\ g,\ f,\ e,\ d,\ c.)$
$F_{4} = f.\ (\ldots\ g,\ f,\ e,\ d,\ c,\ b.)$
$F_{3} = f.\ (\ldots\ f,\ e,\ d,\ c,\ b,\ a.)$
$F_{2} = f.\ (\ldots\ e,\ d,\ c,\ b,\ a.)$
$F_{1} = f.\ (\ldots\ d,\ c,\ b,\ a.)$

De l'équation relative F_{15} nous tirons n en fonction de o et m, que nous reportons dans l'équation relative à F_{14}, d'où nous tirons l en fonction de o et m ; nous continuons ainsi de proche en proche, jusqu'à l'équation relative à F_4 où on aura b, en fonction de o et m, et l'équation relative à F_3 où on aura aussi a, en fonction de ces deux inconnues.

Il ne reste plus qu'à substituer a et b dans les deux équations de F_2 et de F_1 où e, d et c sont aussi connues en fonction de o et de m.

Ce système de 15 équations à 15 inconnues se ramène donc à un système de deux équations à deux inconnues.

Tous les moments élémentaires *o. m. n.... d. c. b. a.* seront donc connus en fonction des valeurs des forces horizontales $F_1, F_2, F_3 \ldots F_{15}$, en procédant à leurs sommations on obtiendra les moments de flexion cherchés.

66. — *Remarque.* — Nous pouvons ainsi étudier les pou-

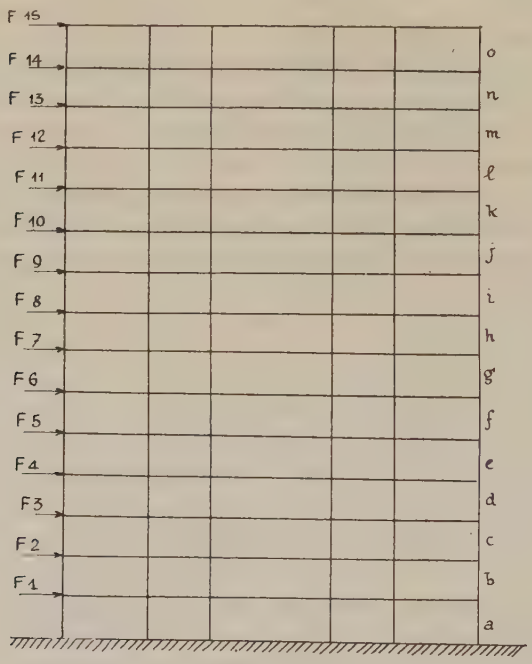


Fig. 79.

tres constituées par un nombre quelconque de panneaux (fig. 80) et prendre leurs déformations totales comme une série de déformations successives de ces derniers dont les nœuds sont pourvus d'appuis auxiliaires, et où les actions de leurs broches produisent les mêmes déformations que les efforts verticaux correspondants (fig. 81 à 85).

On a autant d'équations, moins une, qu'il y a de panneaux ; pour avoir l'équation complémentaire du système à résoudre on écrit que la réaction d'un appui ordinaire est équivalente aux réactions des appuis qui sont supposés exister sur le montant correspondant.

Pour un grand nombre de panneaux on aura un problème analogue au précédent, c'est-à-dire à un système d'équations à gradins.

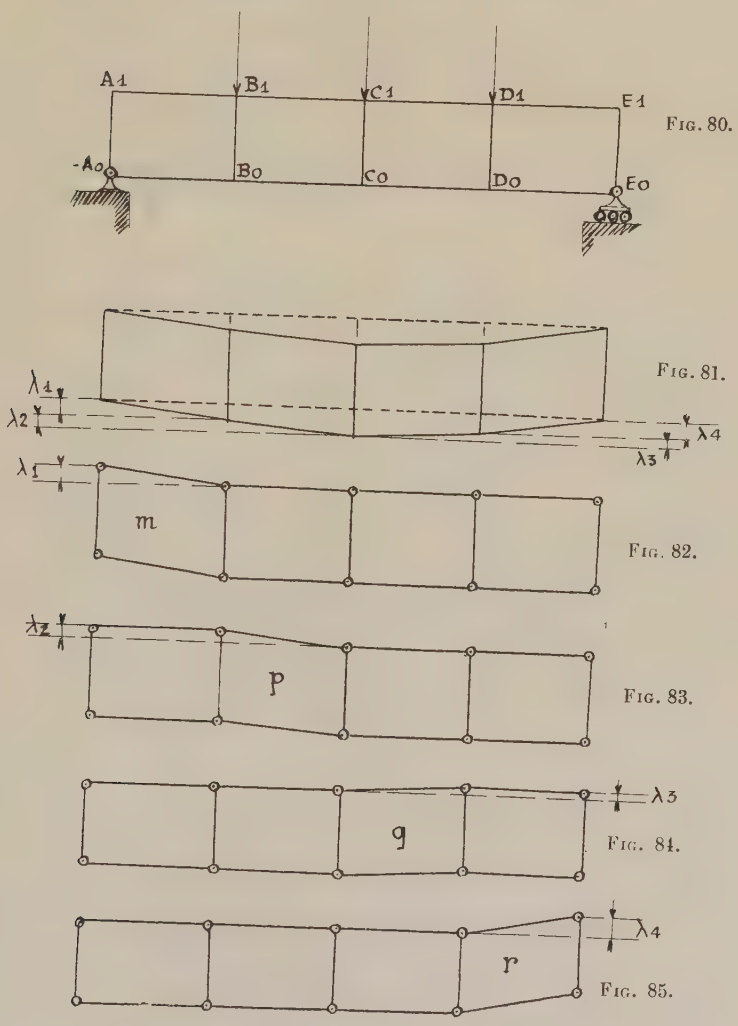


Fig. 80.

Fig. 81.

Fig. 82.

Fig. 83.

Fig. 84.

Fig. 85.

67.—*Méthode mixte.*—Enfin, dans certains cas, on pourra être conduit, dans le but de réduire les calculs, à faire l'application simultanée des deux méthodes, méthode directe et méthode des appuis (ou encastrements) auxiliaires.

ACTION DE LA TEMPÉRATURE SUR LES CONSTRUCTIONS COMPLEXES

1° Méthode directe.

68. — On prend la construction à son état naturel et on se sert des formules de Bresse dans lesquelles le terme afférent à la température est seul conservé.

Les marches à suivre sont identiques aux cas de charges quelconques.

2° Méthode des appuis auxiliaires a rotules.

69. — Soit la construction donnée par la figure 86 où les appuis sont à encastrements, pour laquelle on a :

$$A_0B_0 = L_1, \quad B_0C_0 = L_2,$$
$$C_0D_0 = L_3, \quad D_0E_0 = L_4.$$

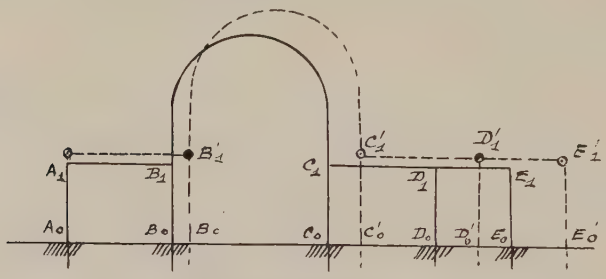


Fig. 86.

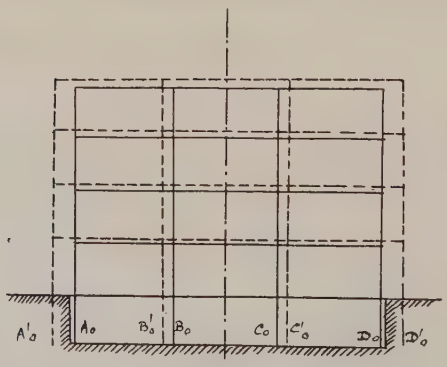


Fig. 87.

Soit α le coefficient de dilatation de la matière consti-

tuant cet édifice et la variation de température envisagée.

Supposons cette construction à son état naturel, tous ses appuis rendus libres, sauf le premier A_0.

Pour une variation de température t positive, par exemple, elle aura pris la forme donnée en pointillé.

Pour laquelle nous considérons que tous les appuis sont encore à encastrements.

Posons en A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 et E'_1 des appuis auxiliaires à rotules. Calculons :

$$B_0B'_0 = L_1\,\alpha t$$
$$C_0C'_0 = (L_1 + L_2)\,\alpha t$$
$$D_0D'_0 = (L_1 + L_2 + L_3)\alpha t$$
$$E_0E'_0 = (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)\,\alpha t.$$

Ramenons successivement B'_0 en B_0, C'_0 en C_0, D'_0 en D_0, E'_0 en E_0 et déterminons les moments et réactions horizontales des axes des appuis auxiliaires à rotules qui correspondent à ces déplacements.

Retranchons ces moments de ceux provoqués par les réactions des broches appliquées à la construction prise à nouveau à son état naturel, et nous obtenons ainsi les moments dus à la variation de température t.

70. — Si la construction possède un axe de symétrie et

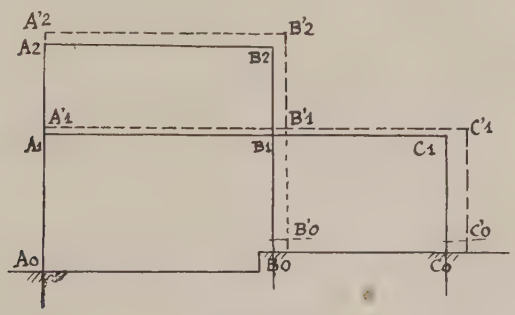


Fig. 88.

si les réactions des broches ne sont pas susceptibles de provoquer de déformation, la première opération est suffisante.

Soit par exemple l'édifice donné par la figure 87, les

réactions horizontales des broches des appuis auxiliaires à rotules s'équilibrent, et il n'y a lieu que de se préoccuper des moments provoqués par les déplacements $A_0A'_0$, $B_0B'_0$, C'_0C_0 et D'_0D_0.

71. — Pour les constructions (fig. 88 et fig. 89) dont

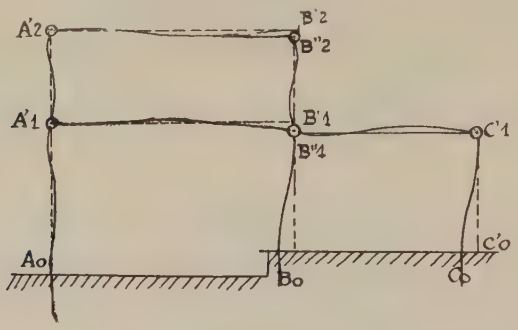


Fig. 89.

les montants sont inégaux, on aura enfin à prendre en considération, outre les déplacements horizontaux, les différences d'allongement des montants.

Ce cas est étudié aux applications pratiques.

ANNEXE

FORMULES USUELLES POUR L'APPLICATION DE LA METHODE DES APPUIS AUXILIAIRES

1° Variations angulaires aux appuis d'une poutre droite, soumise uniquement a un couple en chacun de ses appuis.

72. — Soit la poutre droite S_0S_1 (fig. 90), pour laquelle la formule de Bresse donne :

$$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Omega_0 (x_1 - x_0) - \int_0^1 \frac{M (x_1 - x)\, dx}{EI},$$

Fig. 90.

d'où :

$$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Omega_0 (x_1 - x_0) - x_1 \int_0^1 \frac{M dx}{EI} + \int_0^1 \frac{M x dx}{EI}.$$

mais comme :

$$\Omega_0 = \Omega_1 + \int_0^1 \frac{M dx}{EI},$$

il en résulte que :

$$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Omega_1 x_1 + \int_0^1 \frac{M x dx}{EI}.$$

si :

$$\Delta y_1 - \Delta y_0 = 0, \text{ et... } x = l,$$

$$\Omega_1 = -\frac{1}{l} \int_0^1 \frac{M x dx}{EI},$$

$$\Omega_0 = -\frac{1}{l} \int_0^1 \frac{M x dx}{EI} + \int_0^1 \frac{M dx}{EI}.$$

Si en S_0 existe le moment M_0 et en 1 le moment M_1, on aura :

$$M_1 = M_0 - V_0 l,$$

et :

$$V_0 = \frac{M_0 - M_1}{l},$$

d'où :

$$M = M_0 - \frac{M_0 - M_1}{l}.$$

En admettant E et I, constants sur toute la longueur de la poutre, on a pour le calcul de :

$$\int_0^1 M dx = M_0 \int_0^1 dx + \frac{M_1 - M_0}{l} \int_0^1 x dx = M_0 {}_0^1[x] + \frac{M_1 - M_0}{l} {}_0^1\left[\frac{x^2}{2}\right]$$
$$= \frac{2 M_0 l + M_1 l^2 - M_0 l^2}{l},$$

d'où :

$$\int_0^1 \frac{M dx}{EI} = \frac{(M_0 + M_1) l}{2EI}.$$

Calcul de :

$$\int_0^1 M x dx :$$

$$\int_0^1 M x dx = M_0 \int_0^1 x dx + \frac{M_1 - M_0}{l} \int_0^1 x^2 dx$$
$$= \frac{3 M_0 l^3 + 2 M_1 l^3 - 2 M_0 l^3}{6l} = \frac{(M_0 + 2M_1) l^2}{6}.$$

donc :

$$\int_0^1 \frac{M x dx}{EI} = \frac{(M_0 + 2M_1) l^2}{6EI}.$$

et enfin :

$$\Omega_1 = -\frac{1}{l} \int_0^1 \frac{M x dx}{EI} = -\frac{(M_0 + 2M_1) l}{6EI}. \qquad (1)$$

ainsi que :

$$\Omega_0 = -\frac{(M_0 - 2M_1) l}{6EI} + \frac{(M_0 - M_1) l}{6EI} = \frac{(2M_0 - M_1) l}{6EI}. \qquad (2)$$

Si nous considérons les deux travées de rangs n et $n + 1$ d'une poutre continue, non chargées mais soumises

en chacun des appuis à un moment de flexion, pour la travée n à l'appui N, on a comme variation angulaire :

$$\Omega_n = \frac{-(2M_n + M_{n-1})\, l_n}{6E_n I_n} \qquad (3)$$

et pour la travée $n + 1$ au même appui :

$$\Omega_{n+1} = \frac{-(2M_n + M_{n+1})\, l_{n+1}}{6E_{n+1} I_{n+1}}. \qquad (4)$$

Ce sont les formules fondamentales de calcul des coefficients de proportionnalité des constructions à éléments rectilignes.

2° Coefficients de proportionnalité d'une poutre continue.

73. — Le coefficient de proportionnalité de la série de gauche afférent à une travée n d'une poutre continue étant

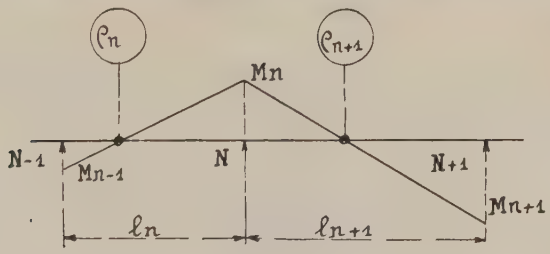


Fig. 91.

ρ_n, on se propose de calculer le foyer de la même série pour la travée $n + 1$ (fig. 91).

Pour la travée n, la variation angulaire à l'appui N est, comme on l'a vu plus haut :

$$\Omega_n = \frac{-(2M_n + M_{n-1})\, l_n}{6E_n I_n}, \qquad (3)$$

et pour la travée $n + 1$:

$$\Omega_{n+1} = \frac{(2M_n + M_{n+1})\, l_{n+1}}{6E_{n+1} I_{n+1}}. \qquad (4)$$

Posons :

$$M_n - 1 = -\rho_n M_n.$$
$$M_n = -\rho_{n+1} M_{n+1}.$$

d'où :

$$M_{n+1} = \frac{-M_n}{\rho_{n+1}},$$

eu égard à la continuité, l'on a :

$$\Omega_n = \Omega_{n+1},$$

et conséquemment :

$$\frac{-(2-\rho_n) M_n I_n}{E_n I_n} = \left(2 - \frac{1}{\rho_{n+1}}\right) M_n \frac{l_{n+1}}{E_{n+1} I_{n+1}}.$$

d'où nous tirons la formule :

$$\rho_{n+1} = \frac{1}{2 + (2-\rho_n) \dfrac{l_n E_{n+1} I_{n+1}}{l_{n+1} E_n I_n}}. \qquad (5)$$

3° Coefficient de proportionnalité autour d'un nœud a plusieurs branches.

74. — Soit N un appui à rotules où aboutissent les branches ABCDF..... (fig. 92).

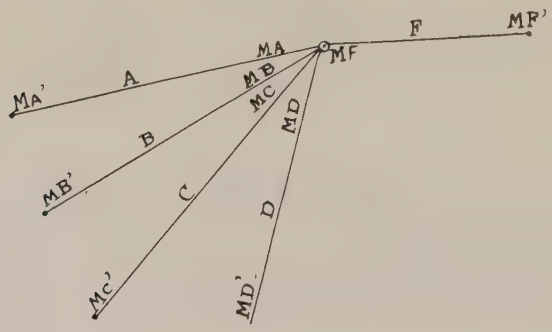


Fig. 92.

Connaissant les coefficients de proportionnalité de la série de gauche des branches A . B . C . D ., on se propose de déterminer celui de la même série afférent à la branche F.

Les angles se maintenant entre les branches pendant la déformation, nous avons les relations angulaires :

$$-\frac{(2M_A + M'_A)l_a}{6E_aI_a} = -\frac{(2M_B + M'_B)l_b}{6E_bI_b} = -\frac{(2M_C + M'_C)l_C}{6E_cI_c}$$
$$= -\frac{(2M_D + M'_D)l_d}{6E_dI_d} = -\frac{(2M_F + M'_F)l_f}{6E_fI_f}.$$

Les coefficients de proportionnalité étant :

$$\frac{M'_A}{M_A} = -\rho_A \qquad \frac{M'_B}{M_B} = -\rho_B \qquad \frac{M'_C}{M_C} = -\rho_C \qquad \frac{M'_D}{M_D} = -\rho_D$$

et :

$$\frac{M'_F}{M_F} = -\rho_F,$$

les équations ci-dessous deviennent :

$$-\frac{(2-\rho_A)l_aM_A}{6E_aI_a} = -\frac{(2-\rho_B)l_bM_B}{6E_bI_b} = -\frac{(2-\rho_C)l_cM_C}{6E_cI_c}$$
$$= -\frac{(2-\rho_D)l_dM_D}{6E_dI_d} = -\frac{(2-\rho_F)l_fM_F}{6E_fI_f},$$

d'où on tire :

$$M_A = -\left(2-\frac{1}{\rho_F}\right)\frac{l_fE_aI_a}{l_aE_fI_f}\left(\frac{1}{2-\rho_A}\right)M_F.$$
$$M_B = -\left(2-\frac{1}{\rho_F}\right)\frac{l_fE_BI_b}{l_bE_fI_f}\left(\frac{1}{2-\rho_B}\right)M_F.$$
$$M_C = -\left(2-\frac{1}{\rho_F}\right)\frac{l_fE_cI_c}{l_cE_fI_f}\left(\frac{1}{2-\rho}\right)M_F.$$
$$M_D = -\left(2-\frac{1}{\rho_F}\right)\frac{l_fE_dI_d}{l_dE_fI_f}\left(\frac{1}{2-\rho_D}\right)M_F.$$

Toutefois, autour de l'axe de l'œillet, ayant la relation suivante :

$$M_A + M_B + M_C + M_D + M_F = 0$$

(M_F étant l'expression des moments lus à gauche de la section de la branche F, faite à sa jonction avec l'œillet).

Ce qui permet d'écrire :

$$-\left(2-\frac{1}{\rho_F}\right)\frac{l_f}{E_fI_f}$$
$$\left[\frac{E_aI_a}{l_a(2-\rho_A)} + \frac{E_bI_b}{l_b(2-\rho_B)} + \frac{E_cI_c}{l_c(2-\rho_C)} + \frac{E_dI_d}{l_d(2-\rho_D)}\right] = 1.$$

D'où la formule générale : (6)

$$\rho_F = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{l_f}{E_f I_f}\left[\cfrac{E_a I_a}{l_a(2-\rho_A)} + \cfrac{E_b I_b}{l_b(2-\rho_B)} + \cfrac{E_c I_c}{l_c(2-\rho_C)} + \cfrac{E_d I_d}{l_d(2-\rho_D)} + \dots\right]}}.$$

Position du foyer correspondant à un coefficient de proportionnalité (fig. 93).

75. — Nous avons :

$$\rho_n = \frac{U_n}{V_n} \qquad \frac{U_n}{V_n + U_n} = \frac{U_n}{L_n} = \frac{\rho_n}{\rho_n + 1}.$$

$$U_n = \frac{\rho_n}{\rho_n + 1} L_n. \qquad (7)$$

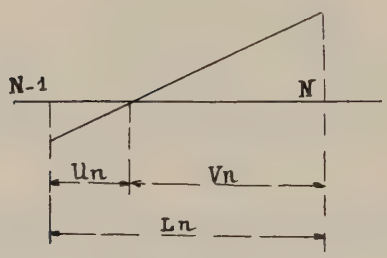


Fig. 93.

4° Dénivellation des appuis dans une poutre continue.

76. — S'il y a dénivellation des appuis pour les travées n et $n + 1$ d'une poutre continue, se développent

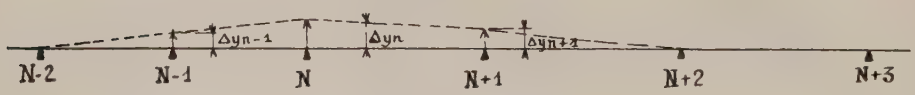


Fig. 94.

des moments de flexion et des réactions; on se propose de trouver les relations qui existent entre eux (fig. 94).

La formule de Bresse :

$$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Omega_0 x_1 - x_1 \int_0^1 \frac{M dx}{EI} + \int_0^1 \frac{M x dx}{EI},$$

donne :

$$-\Omega_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_1} + \int_0^1 \frac{M dx}{EI} - \int_0^1 \frac{M x dx}{EI}.$$

On a de même :

$$\Omega_1 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_1} - \int_0^1 \frac{M x dx}{EI}.$$

$$\Omega_n = -\frac{\Delta y_n - \Delta y_{n-1}}{l_n} - \int_{N-1}^{N} \frac{M x dx}{E_n I_n}.$$

En écrivant que les angles en N sont égaux pour les travées n et $n + 1$ de la même poutre continue, on a tout d'abord pour les expressions des variations angulaires :

$$\Omega_n = \frac{\Delta y_{n+1} - \Delta y_n}{l_{n+1}} + \int_N^{N+1} \frac{M dx}{E_{n+1} I_{n+1}} - \frac{1}{l_{n+1}} \int_N^{N+1} \frac{M x dx}{E_{n+1} I_{n+1}}.$$

C'est-à-dire :

$$\Omega_n = -\frac{\Delta y_n - \Delta y_{n-1}}{l_n} + \frac{(M_{n+1} + 2M_n) l_n}{6 E_n I_n},$$

$$\Omega_n = \frac{\Delta y_{n+1} - \Delta y_n}{l_{n+1}} + \frac{(2M_n + M_{n+1}) l_{n+1}}{6 E_{n+1} I_{n+1}},$$

d'où finalement :

$$\frac{(M_{n+1} + 2M_n) l_n}{6 E_n I_n} + \frac{(2M_n + M_{n+1}) l_{n+1}}{6 E_{n+1} I_{n+1}} = \frac{\Delta y_n - \Delta y_{n-}}{l_n} + \frac{\Delta y_n - \Delta y_{n+1}}{l_{n+1}}. \qquad (8)$$

Supposons que la nième travée n'existe pas et que $\Omega_n = 0$, nous avons (fig. 95) :

$$\frac{\Delta y_{n+1} - \Delta y_n}{l_{n+1}} + \frac{(2M_n + M_{n+1}) l_{n+1}}{6 E_{n+1} I_{n+1}} = 0.$$

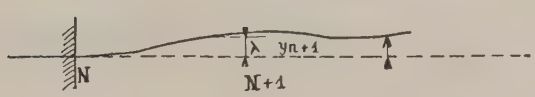


Fig. 95.

Posant :

$$\Delta y_{n+1} - \Delta y_n = \lambda,$$

d'où :

$$\lambda = -\frac{(2M_n + M_{n+1})\, l_{n+1}^2}{6E_{n+1} I_{n+1}}. \qquad (9)$$

Calcul de Ω_{n+1}.

On a :

$$\Omega_{n+1} - \Omega_n = -\int_n^{n+1} \frac{M dx}{E_{n+1} I_{n+1}},$$

Or, comme $\Omega n = 0$, on a :

$$\Omega_{n+1} = -\frac{(M_n - M_{n+1})\, l_{n+1}}{2E_{n+1} I_{n+1}}. \qquad (10)$$

77. — *Remarques.* — *a*) On sait que s'il se produit une dénivellation dans une travée d'une poutre continue, les moments qui en résultent sont entre eux dans le rapport des distances des appuis aux foyers qui leur sont voisins.

Ainsi on a pour valeurs absolues :

$$\frac{M_n}{M_{n+1}} = -\frac{N, f_n}{\overline{N+1}, f_n}.$$

Exprimons cette propriété en fonction des coefficients de proportionnalité afférents à cette travée en remplaçant $\overline{N}.f_n$, $\overline{N+1}.f_n$ en fonction de ceux-ci, nous avons ainsi :

$$\frac{M_n}{M_{n+1}} = \frac{\rho_{n,n+1}(1 + \rho_{n+1,n})}{\rho_{n+1,n}(1 + \rho_{n,n+1})} \text{ (fig. 96)}, \qquad (11)$$

ce qui rend inutile la connaissance de la position des foyers.

b) Supposons que le premier appui soit à rotule ; connaissant M_A et Ω_B, proposons-nous de calculer λ et Ω_A (fig. 96).

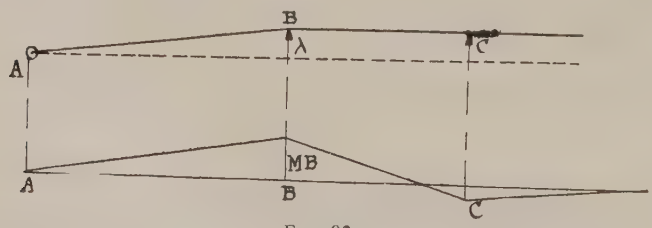


Fig. 96.

Les formules de Bresse nous donnent :

$$\lambda = \Omega_A l - l \int_A^B \frac{M dx}{EI} + \int_A^B \frac{M x dx}{EI}$$

de la deuxième équation, on a immédiatement :

$$\Omega_B - \Omega_A = -\int_A^B \frac{M dx}{EI},$$

et avec cette formule on peut écrire :

$$\Omega_A = \Omega_B + \int_A^B \frac{M dx}{EI} \qquad (12)$$

$$\Omega_A l = \Omega_B l + l \int_A^B \frac{M dx}{EI},$$

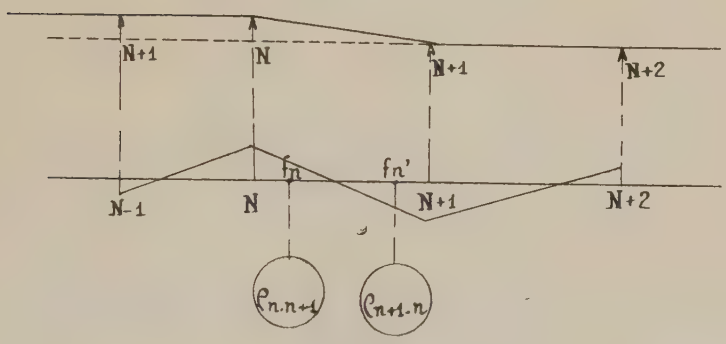


Fig. 97.

que l'on substitue dans la première :

$$\lambda = \Omega_B l + \int_A^B \frac{M x dx}{EI}. \qquad (13)$$

Ces formules sont utiles pour l'étude des cadres et éléments rectilignes.

5° Emploi des encastrements auxiliaires pour calculer les angles aux appuis d'une poutre a appuis ordinaires.

78. — a) *Charge isolée* (fig. 98). — Soit la force verticale P qui agit en un point α d'une poutre rectiligne AB, dont les appuis A et B sont ordinaires.

Si elle était encastrée en chacun des appuis, les moments d'encastrements respectifs seraient :

$$M_A = \frac{ab^2}{(a+b)^2} P \quad \text{et} \quad M_B = \frac{ba^2}{(a+b)^2} P.$$

Pour ramener la poutre à l'état naturel, il faut appliquer en A et en B respectivement — M_A et — M_B (fig. 98).

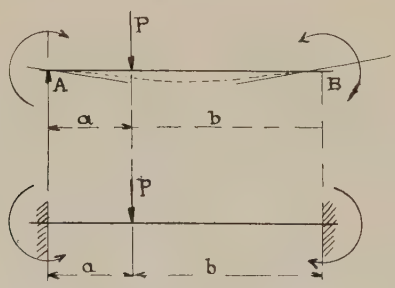


Fig. 98.

Les variations angulaires sont, dans ces conditions :

$$\Omega_A = -\frac{(2M_A + M_B)}{6EI}(a+b),$$

et :

$$\Omega_B = \frac{(2M_B + M_A)}{6EI}(a+b)$$

et, en fonction de P :

$$\Omega_A = -\frac{(2b+a)\,ab}{6(a+b)\,EI} P, \qquad (14)$$

$$\Omega_B = \frac{(a+2b)\,ab}{6(a+b)\,EI} P, \qquad (15)$$

ce sont les formules classiques connues.

79. — b) *Charge uniformément répartie.* — La poutre à appuis libres est chargée uniformément à raison de p kg. par mètre courant (fig. 99).

Si elle est encastrée en B et en A, on aurait respectivement en ces points :

$$M_A = \frac{pl^2}{12} \quad \text{et} \quad M_B = \frac{pl^2}{12}.$$

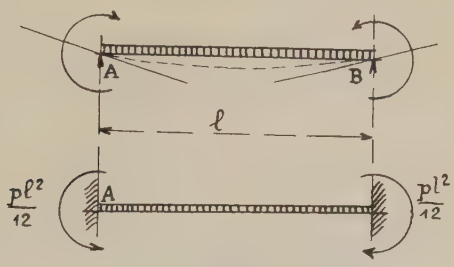


Fig. 99.

Si on applique $-\frac{pl^2}{12}$, l'angle de rotation en A sera donné par :

$$\Omega_A = -\left(\frac{2M_A + M_B}{6EI}\right)l = -\frac{3M_A l}{6EI}.$$

En substituant à M_A sa valeur $\frac{pl^2}{12}$, on aura :

$$\Omega_A = -\frac{\frac{3pl^2}{12}}{6EI} = -\frac{pl^3}{24EI}, \tag{16}$$

et pareillement :

$$\Omega_B = \frac{pl^3}{24EI}. \tag{17}$$

6° Moments aux appuis d'une poutre continue en fonction des coefficients de proportionnalité (fig. 100).

80. — a) *Force isolée.* — Nous établissons les formules ci-après en fonction des coordonnées des foyers de la traverse de rang n :

$$M_{n-1} = -\frac{PU_n}{U'_n - U_n} \cdot \frac{a}{l_n}\left(1 - \frac{a}{l_n}\right)(2U' - V'_n - a),$$

$$M_n = -\frac{PV'_n}{U'_n - U_n} \cdot \frac{a}{l_n}\left(1 - \frac{a}{l_n}\right)(-2U_n - V_n + a).$$

En désignant par ρ le coefficient de proportionnalité de la série de gauche de cette travée et par ρ' celle de la série de droite, on a :

$$U_n = l_n \frac{\rho}{1+\rho}, \qquad V_n = \frac{l_n}{1+\rho},$$

$$V'_n = l_n \frac{\rho'}{1+\rho'}, \qquad U'_n = \frac{l_n}{1+\rho'}.$$

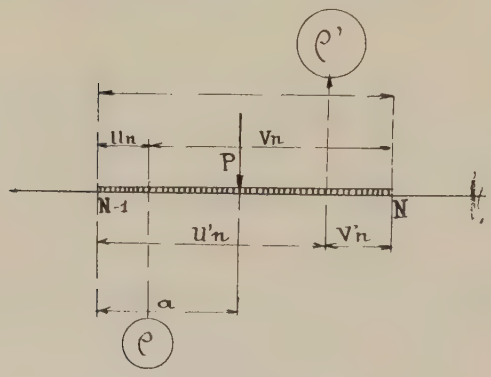


Fig. 100.

En substituant ces valeurs dans les formules ci-dessus, nous avons :

$$M_{n-1} = -P \cdot \frac{\rho(1+\rho')}{1-\rho\rho'} \cdot \frac{a}{l_n}\left(1-\frac{a}{l_n}\right)\left(\frac{2-\rho'}{1+\rho'} \cdot l_n - a\right), \quad (18)$$

$$M_n = -P \cdot \frac{\rho'(1+\rho)}{1-\rho\rho'} \cdot \frac{a}{l_n}\left(1-\frac{a}{l_n}\right)\left(\frac{1-2\rho}{1+\rho} \cdot l_n + a\right). \quad (19)$$

81. — b) *Charge uniformément répartie.* — Nous avons établi aussi les formules pour une charge p uniformément répartie par mètre courant :

$$M_{n-1} = -p \frac{U_n}{U'_n - U_n} \frac{l_n}{6}\left(2U'_n - V'_n - \frac{l_n}{2}\right), \quad (20)$$

$$M_n = -p \frac{V'_n}{U'_n - U_n} \frac{l_n}{6}\left(\frac{l_n}{2} + V_n - 2U_n\right), \quad (21)$$

lesquelles deviennent en fonction de coefficients de proportionnalité :

$$M_{n-1} = -\frac{pl_n^2}{4} \frac{\rho(1-\rho')}{1-\rho\rho'}, \quad (22)$$

$$M_n = -\frac{pl_n^2}{4} \frac{\rho'(1-\rho)}{1-\rho\rho'}. \quad (23)$$

TROISIÈME PARTIE

APPLICATIONS PRATIQUES

Soit la construction représentée par la figure 101 dont les dimensions ont été déterminées par les méthodes

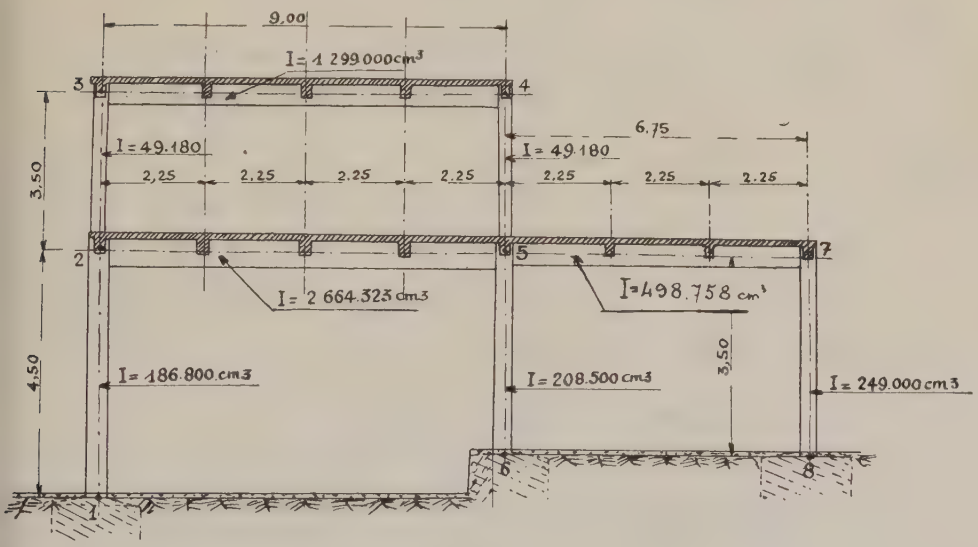


Fig. 101.

ordinaires approchées de calcul pour les charges indiquées à la figure 101 *bis*.

Les moments d'inertie correspondants sont pour les éléments :

1-2.	186.800 cm³.
2-3.	2.664.323 —
2-3.	49.180 —
3-4	1.299.000 —
4-5.	49.180 —
5-6.	208.500 —
5-7.	498.758 —
7-8.	219.000 —

La pratique des calculs de la recherche des réactions des appuis montre que ces moments n'agissent que par leurs rapports à l'un d'eux ; nous prenons comme terme

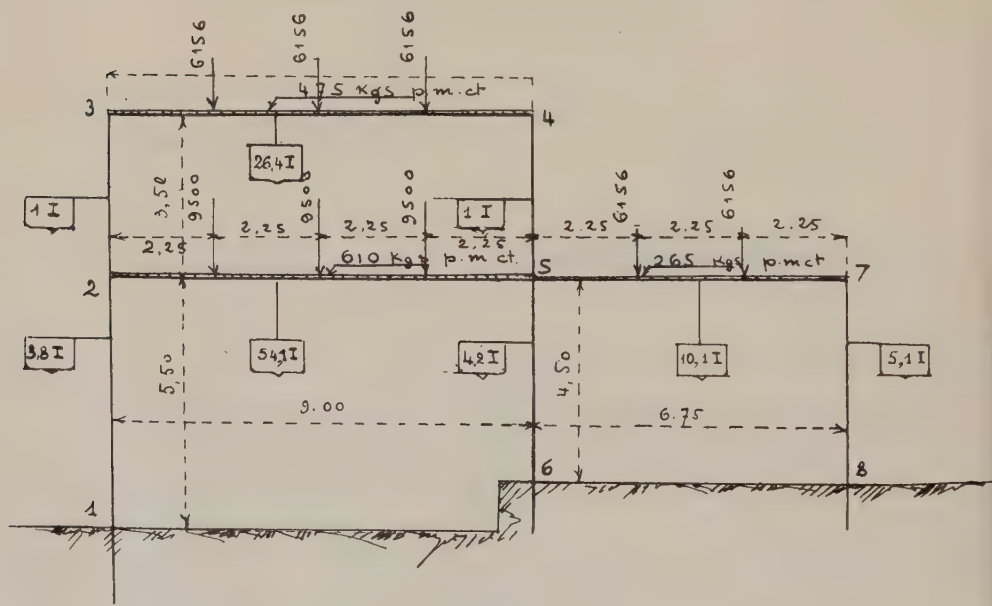


Fig. 101 *bis*.

de comparaison le plus faible, c'est-à-dire celui de 2-3 qui est identique à celui de 4-5 ; les rapports utilisables sont inscrits dans les écussons de la figure 101 *bis*.

Nous nous proposons d'étudier cette construction respectivement à l'aide des deux méthodes : directe et des appuis auxiliaires à rotule.

I. Méthode directe

1° 1er Etage —

Fig. 102.

2° 2e Etage —

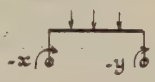


Fig. 103.

1° Premier étage.

Forces verticales

A. Méthode directe

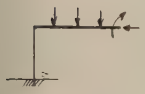


Fig. 104.

Fig. 105.

travée

Fig. 106.

a_1 Méthode directe

a'_1 Méthode des appuis auxiliaires

travée

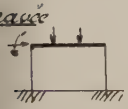


Fig. 107.

a_2 Méthode directe

a'_2 Méthode des appuis auxiliaires

a_3 Résolution

B. Méthode des appuis auxiliaires

Appuis auxiliaires

Fig. 108.

Réactions

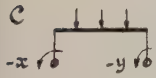
Fig. 109.

Couples x et y.

A'. Méthode directe | B'. Méthode des appuis auxiliaires

2° Deuxième étage

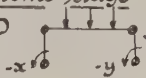
C



Méthode directe

Fig. 110.

D



Méthode des appuis auxiliaires

Fig. 111.

E. Résolution.

II. Méthode des appuis auxiliaires.

a. appuis auxiliaires.

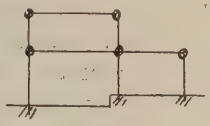


Fig. 112

b. Réactions.

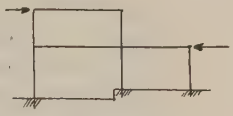


Fig. 113

Pour appliquer la méthode directe à cette construction, on commence par calculer le premier étage, celui-ci ayant tous ses appuis encastrés, on procède comme il est indiqué à l'étude des *Constructions continues à un étage*, § 16.

On remarque que le point 5 est assujetti à se déplacer sur une droite horizontale, Δ_{y5} n'est donc pas à prendre en considération et, par suite, V_5 n'entre pas dans les inconnues à chercher pour la détermination des moments de flexion; ces inconnues se réduisent à un couple et à une force horizontale.

Pour passer au second étage, il n'y a pas lieu de se préoccuper pour la traverse 2 — 5 d'une part, et pour l'arc 2-3-4-5 d'autre part, des expressions $\Delta_{x5} - \Delta_{x2}$ et $\Delta_{y5} - \Delta_{y2}$ qui sont nulles, mais seulement des variations d'angles en 2 et 5, ramenant le problème à la recherche de deux couples.

Afin de nous rendre compte des avantages de la méthode des appuis auxiliaires à rotule, nous traiterons aussi par cette méthode, tous les problèmes que nous aurons à résoudre au cours de l'application de la méthode directe.

I. — MÉTHODE DIRECTE

1° *PREMIER ÉTAGE A DEUX TRAVÉES*

(*Ensemble* a_1, a_2).

A. Méthode directe.

Première travée.

a_1. Méthode directe. — Soit la portion 1-2-5 du cadre (fig. 114) dans lequel les moments d'inertie des éléments sont 3,8 I et 54,1 I; I étant leur commune mesure et pour lequel on va résoudre les problèmes suivants :

Déterminer les moments de flexion, l'appui 1, supposé à encastrement, et l'appui 3 pourvu d'une rotule astreinte

à se déplacer librement sur une ligne droite horizontale ; les déplacements linéaires du point 5 et angulaires des points 2 et 5 pour les efforts ci-après :

Une force horizontale appliquée suivant 2 — 5 ; des moments incidents appliqués en 2 et 5 ; une charge continue

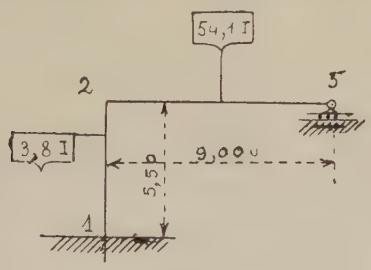


Fig. 114.

de p par mètre courant appliquée sur la traverse 2-5 ; une charge isolée P verticale agissant en trois points de cette traverse.

Pour utiliser les formules de Bresse, calculons les intégrales caractéristiques simples :

$$\int_1^2 ds = 5{,}50 \qquad \int_2^5 ds = 9{,}00$$

$$\int_1^2 x^2 ds = 0 \qquad \int_2^5 x ds = \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_2^5 = \frac{84}{2} = 40{,}50$$

$$\int_1^2 y ds = \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_1^2 = 15{,}125 \quad \int_2^5 y ds = 5{,}5 \int_2^5 ds = 5{,}5 \times 9 = 49{,}50$$

$$\int_1^2 x ds = 0 \qquad \int_2^5 x^2 ds = \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_2^5 = 243{,}00$$

$$\int_1^2 y^2 ds = \Big[\frac{y^3}{3}\Big]_1^2 ds = 55{,}4583 \quad \int_2^5 y^2 ds = 5{,}5^2 \int_2^5 ds$$

$$= 30{,}25 \times 9 = 272{,}25$$

$$\int_1^2 xy ds = 0 \qquad \int_2^5 xy ds = 5{,}5 \int_2^5 x ds = 5{,}5 \times 40{,}5 = 222{,}25,$$

que nous consignons dans le tableau ci-après.

Les caractéristiques d'utilisation étant obtenues en di-

visant par 3,8 celles correspondantes de 1 à 2, et par 54,1 celles afférentes à 2 et 5.

E étant identique pour le montant 1-2 et la traverse 2-5.

	Caractéristiques simples.		Caractéristiques d'utilisation.	
	1 à 2	2 à 5	1 à 2 divisé par 3,8.	2 à 5 divisé par 54,1.
	—	—	—	—
$\int ds$	5,5	9,0	1,4473	0,1663
$\int x ds$	0	40,50	0	0,7486
$\int y ds$	15,125	49,50	3,9803	0,9149
$\int x^2 ds$	55,4583	272,25	0	4,4917
$\int y^2 ds$	0	243,00	14,5943	5,0323
$\int xy ds$	0	222,75	0	4,1174

1° Force horizontale appliquée en 2.

Nous écrivons que le déplacement vertical de l'appui 2 est nul (fig. 115) :

$$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Omega_0 (x_1 - x_0) - \int_{s_0}^{s_1} \frac{\mathfrak{M}}{EI} (x_1 - x) ds.$$

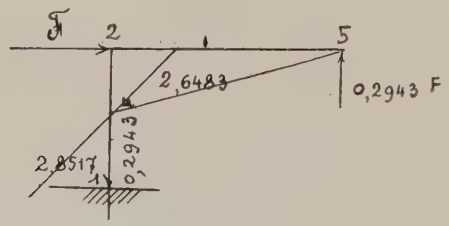


Fig. 115.

Dans cette application,

$$\Omega_0 = 0, \Delta y_5 - \Delta y_1 = \Delta y_5 = 0,$$

d'où :

$$\int_1^5 \frac{\mathfrak{M}}{EI} (x_5 - x) ds = 0$$

Comme

$$x_5 = 9$$

on a :

$$9\int_1^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} - \int_1^5 \frac{\mathfrak{M}xds}{EI} = 0.$$

Les moments sont :

De 1 à 2..... $\mathfrak{M} = M_1 + Q_1 y$.
De 2 à 5..... $\mathfrak{M} = M_1 - Q_1 y - V_1 x$.

Pour symplification typographique nous supprimons les indices à $M_1 Q_1 V_1$, nous avons :

$$\int_1^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} = \int_1^2 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} + \int_2^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI}$$

$$\int_1^2 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} = M\int_1^2 \frac{ds}{3{,}8\,EI} + Q\int_1^2 \frac{yds}{3{,}8\,EI} = \frac{1{,}4473\,M + 3{,}9803\,Q}{EI}$$

$$\int_2^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} = M\int_2^5 \frac{ds}{54{,}1\,EI} + Q\int_2^5 \frac{yds}{54{,}1\,EI} - V\int_2^5 \frac{xds}{54{,}1\,EI}$$

$$= \frac{0{,}1663\,M + 0{,}9149\,Q - 0{,}7486\,V}{EI},$$

d'où :

$$\int_1^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} = \frac{1{,}6136\,M + 4{,}8952\,Q - 0{,}7486\,V}{EI},$$

ensuite :

$$\int_1^5 \frac{\mathfrak{M}xds}{EI} = \int_1^2 \frac{\mathfrak{M}xds}{EI} + \int_2^5 \frac{\mathfrak{M}xds}{EI}$$

$$\int_1^2 \frac{\mathfrak{M}xds}{EI} = M\int_1^2 \frac{xds}{EI} + Q\int_1^2 \frac{xyds}{EI} = 0$$

$$\int_2^5 \frac{\mathfrak{M}xds}{EI} = M\int_2^5 \frac{xds}{54{,}1\,EI} + Q\int_2^5 \frac{xyds}{54{,}1\,EI}$$

$$- V\int_2^5 \frac{x^2ds}{54{,}1\,EI} = \frac{0{,}7486\,M + 4{,}1174\,Q - 4{,}4917\,V}{EI},$$

d'où :

$$9\,(1{,}6136\,M + 4{,}8952\,Q - 0{,}7486\,V) - 0{,}7486\,M - 4{,}1174\,Q$$
$$+ 4{,}4917\,V = 13{,}7738\,M + 39{,}9394\,Q - 2{,}2447\,V = 0.$$

On a $Q = -F$ et l'équation d'équilibre du point 1 donne :

$$M - 5,5\,F - 9V = 0,$$

d'où :

$$V = 0,1111\,M - 0,6111\,F,$$

et par suite :

$$13,5244\,M - 38,5677\,F = 0,$$
$$M = 2,8517\,F,$$

et

$$V = 2,8517\,F \times 0,1111 - 0,6111\,F = -0,2943\,F$$
$$M_2 = -5,500\,F + 2,8517\,F = -2,6483\,F.$$

Calcul de $\Delta x_2 = \Delta x_5$ (fig. 116). — La traverse 2 — 5

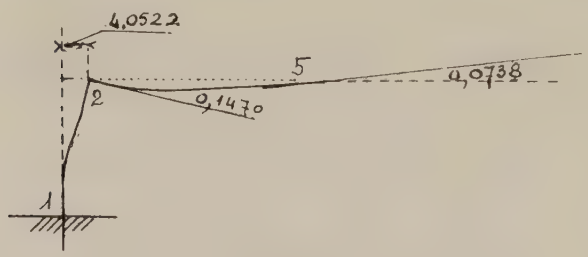


Fig. 116.

étant incompressible par hypothèse, $\Delta x_5 = \Delta x_2$, on a ce dernier à l'aide de la formule de Bresse :

$$\Delta x_1 - \Delta x_0 = -\Omega_0(y_1 - y_0) + \int_{s_0}^{s_1} \frac{\mathfrak{M}}{EI}(y_1 - y)\,ds = 0,$$

dans laquelle

$$\Omega_0 = 0,$$

donc :

$$\Delta x_2 = \int_1^2 \frac{\mathfrak{M}}{EI}(y_1 - y)\,ds = \int_1^2 \frac{\mathfrak{M}}{EI}(5,5 - y)\,ds$$
$$= 5,5 \int_1^2 \frac{\mathfrak{M}\,ds}{EI} - \int_1^2 \frac{\mathfrak{M}\,y\,ds}{EI}.$$

$\int_1^2 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI}$ a été déjà calculé plus haut, soit :

$$\int_1^2 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} = \frac{1,4473\,M + 3,9803\,Q}{EI}$$

$$= \frac{1,4473 \times 2,8517\,F}{EI} - \frac{3,9803\,M}{EI} = \frac{0,1470\,F}{EI},$$

et

$$\int_1^2 \mathfrak{M} y ds = M \int_1^2 \frac{y ds}{3,8\,EI} + Q \int_1^2 \frac{y^2 ds}{3,8\,EI} = \frac{3,9803\,M}{EI}$$

$$+ \frac{14,594\,Q}{EI}$$

$$= \frac{3,9803 \times 2,8517\,F}{EI} - \frac{14,594\,F}{EI} = -\frac{3,2437\,F}{EI}.$$

finalement :

$$\Delta x_2 = \frac{5,5 \times 0,1470\,F}{EI} + \frac{3,2437\,F}{EI} = \frac{4,0522\,F}{EI}.$$

Calcul de ω_2 *et* ω_5. — Les formules de Bresse donnent :

$$\Omega_1 - \Omega_0 = -\int_{s_0}^{s_1} \frac{\mathfrak{M} ds}{EI}$$

dans le cas considéré,
d'où (fig. 116) :

$$\omega_2 = \int_1^2 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} = -\frac{0,1470\,F}{EI}$$

$$\omega_5 = -\int_1^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} = \frac{1,6136\,M - 4,8952\,Q + 0,7486\,V}{EI} = \frac{0,0738\,F}{EI}.$$

2° Moment incident en 2 (fig. 117).

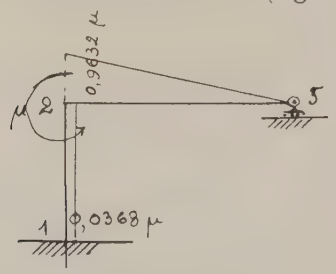


Fig. 117.

Il n'existe en 1 que le moment d'encastrement et une réaction verticale.

On a donc sur les éléments les moments :

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ à } 2 & \mathfrak{M} = M \\ 1 \text{ à } 5 & \mathfrak{M} = M - Vx + \mu. \end{array}$$

Écrivons que 5 ne se déplace pas verticalement, c'est-à-dire :

$$9 \int_1^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} - \int_1^5 \frac{\mathfrak{M} x ds}{EI} = 0.$$

Eu égard aux résultats ci-dessus nous n'avons qu'à calculer :

$$\int_2^5 \frac{\mu ds}{EI} \text{ et } \int_2^5 \frac{\mu x ds}{EI}$$

$$\int_2^5 \frac{\mu ds}{EI} = \mu \int_2^5 \frac{ds}{EI} = \frac{0,1663\,\mu}{EI}$$

$$\int_2^5 \frac{\mu x ds}{EI} = \mu \int_2^5 \frac{x ds}{EI} = \frac{0,7486\,\mu}{EI}.$$

On a donc pour M et V, comme précédemment :

$$9(1,6136\,M - 0,7486\,V + 0,1663\mu) - 0,7486\,M + 4,4927\,V - 0,7486\mu,$$

c'est-à-dire :

$$13,7838\,M - 2,2447\,V + 0,7481\,\mu = 0.$$

La condition d'équilibre du point 1 nous donne :

$$M - 9V + \mu = 0, \qquad V = \frac{M}{9} - \frac{\mu}{9} = 0,1111\,M - 0,1111\,\mu;$$

d'où :

$$\begin{aligned} M &= -0,0368\mu \\ V &= 0,1070\mu \\ M &= \mu - 0,0368\mu = 0,9632\mu. \end{aligned}$$

Calcul de $\Delta x_5 = \Delta x_2$ (fig. 118).

$$\Delta x_2 = 5,5 \int_1^2 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} - \int_1^2 \frac{\mathfrak{M} y ds}{EI},$$

$$\int_1^2 \mathfrak{M} ds = 1,4473\,M = -1,4473 \times 0,0368\mu = -0,0533\mu,$$

$$\int_1^2 \mathfrak{M} y ds = 3,9803\,M = -3,9803 \times 0,0368\mu = -0,1465\mu,$$

d'où :

$$\Delta x_2 = -\frac{5,5 \times 0,533\mu + 0,1465\mu}{EI} = -\frac{0,1466\mu}{EI}.$$

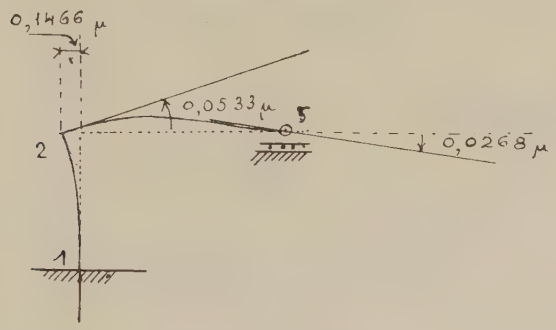


Fig. 118.

Calculs de ω_2 et ω_5.

$$\omega_2 = -\int_1^2 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} = \frac{0,0533\mu}{EI},$$

$$\omega_5 = -\int_1^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} = \frac{-1,6136\,M - 0,7486\,V - 0,1663\mu}{EI}$$

$$= \frac{1,6136 \times 0,0368\mu + 7,486 \times 0,1070\mu - 0,1663\mu}{EI} = -\frac{0,0268\,\mu}{EI}.$$

3° Moment incident en 5 (fig. 119).

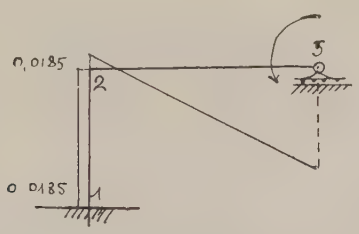


Fig. 119.

Comme au problème précédent il n'y a aucune poussée en 1 et les moments sont donc pour les éléments :

1 à 2. . . . . $\mathfrak{M} = M$
2 à 5. . . . . $\mathfrak{M} = M - Vx$

Écrivons que 5 ne se déplace pas verticalement, c'est-à-dire :

$$9\int_1^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} - \int_1^5 \frac{\mathfrak{M}xds}{EI} = 0.$$

Nous n'avons ici que :

$$\int_1^2 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} = \frac{1,6136\,M - 0,7486\,V}{EI},$$

$$\int_2^5 \frac{\mathfrak{M}xds}{EI} = \frac{0,7486\,M - 4,4927\,V}{EI},$$

d'où l'équation :

$$9(1,6136\,M - 0,7486\,V) - 0,7486\,M + 4,4927\,V = 0,$$

mais on a :

$$M - 9\,V + \mu = 0,$$

puisque 5 en est équilibre, et :

$$V = \frac{M}{9} + \frac{\mu}{9} = 0,1111\,M + 0,1111\,\mu\ldots,$$

finalement :

$$13,5241\,M - 0,2496\mu = 0,$$

d'où :

$$M = \frac{0,2496\mu}{13,5241} = 0,0185\mu,$$

$$V = 0,1111 \times 0,0185\mu + 0,1111\mu = 0,0131\mu.$$

Calcul de $\Delta x_5 = \Delta x_2$ (fig. 120) :

$$\Delta x_2 = 5,5\int_1^2 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} - \int_1^2 \frac{\mathfrak{M}yds}{EI},$$

$$\int_1^2 \mathfrak{M}ds = 1,4473\,M = 1,4473 \times 0,0185\mu = 0,0268\mu,$$

$$\int_1^2 \mathfrak{M}yds = 3,9803\,M = 3,9803 \times 0,0185\mu = 0,0736\mu,$$

$$\Delta x_2 = 5,5 \times 0,0268\mu - 0,0736\mu = 0,0738\mu.$$

Calcul de ω_2 *et* ω_5 (fig. 120) :

$$\omega_2 = -\int_1^2 \frac{Mds}{EI} = -\frac{0{,}0268\mu}{EI},$$

$$\omega_5 = -\int_1^5 \frac{Mds}{EI} = -1{,}6136\,M + 0{,}7486\,V =$$
$$= -1{,}6136 \times 0{,}0185\mu + 0{,}7486 \times 0{,}1131\,\mu = 0{,}0549\mu.$$

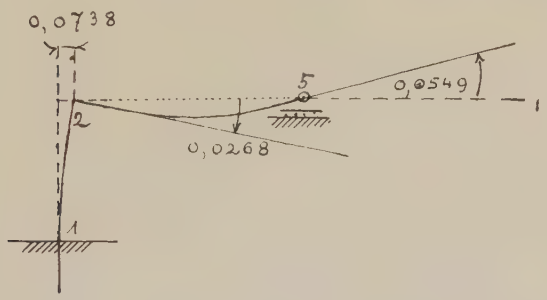


Fig. 120.

4° Charge uniformément répartie sur la traverse 2-5 (fig. 121).

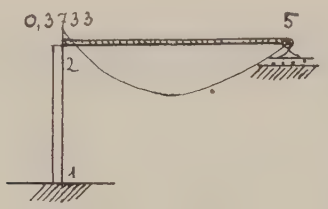


Fig. 121.

Les moments sont :

1 à 2. . . . . $\mathfrak{M} = M$

2 à 5. . . . . $\mathfrak{M} = M - Vx + \frac{px^2}{2}$

$$\int_2^5 Mds = \int_2^5 Mds - V\int_2^5 xds + \frac{p}{2}\int_2^5 x^2ds$$

$$\frac{p}{2}\int_2^5 x^2ds = \quad = \frac{p}{2}\frac{x^3}{3} = p \times \frac{9^3}{6}$$

$$\frac{p}{2}\int_2^5 x^3ds \quad = \frac{p}{2}\frac{x^4}{4} = p \times \frac{9^4}{8}$$

$$9(1{,}6136\,M - 0{,}7486\,V + \frac{9^3 \times p}{6 \times 54{,}1} - 0{,}7486\,M + 4{,}4917\,V - \frac{9^4 \times p}{8 \times 54{,}1}$$

$$13{,}7836\,M + 2{,}2457\,V + 5{,}1301\,p.$$

L'équilibre du point 5 donne :

$$M - 9V + 9 \times 4{,}5p = 0,$$

$$V = \frac{M}{9} + 4{,}5p = 0{,}1111\,M = 4{,}5p,$$

$$13{,}7836\,M - 2{,}2457 \times 4{,}5p - 2{,}2457 \times 0{,}1111\,M + 5{,}0531p = 0,$$

d'où :

$$M = \frac{5{,}0525p}{13{,}5341} = 0{,}3733\,p.$$

$$V = 0{,}1111 \times 0{,}3733p + 4{,}5\,p = 4{,}5415\,p.$$

Calcul de $\Delta x_5 = \Delta x_2$ (fig. 122) :

$$\int_1^2 \mathfrak{M} ds = 1{,}4473 \times 0{,}3733p = 0{,}5403\,p,$$

$$\int_1^2 \mathfrak{M} y ds = -\,3{,}9803 \times 0{,}3733\,p = 1{,}4858p,$$

$$\Delta x_5 = -\,\frac{(-\,5{,}5 \times 0{,}5403 + 1{,}4858)p}{EI} = \frac{1{,}4858\,p}{EI}.$$

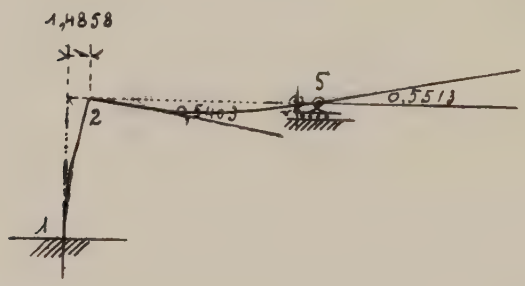


Fig. 122.

Calcul de ω_2 et ω_5 (fig. 122) :

$$\omega_2 = -\int_1^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} = -\,0{,}5403\,p,$$

$$\omega_5 = -\int_1^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} = -\,1{,}6136\,M - 0{,}7486\,V + \frac{9^3 p}{6 \times 54{,}1} =$$

$$= 0{,}6024 - 3{,}3997 + 2{,}2460 = 0{,}5513p.$$

5° Force isolée P sur la traverse 2-5 (fig. 123).

Moments sur les éléments :

De 1 à 2. . . . . $\mathfrak{M} = M$
De 2 à α. . . . . $\mathfrak{M} = M - Vx$
De α à 5. . . . . $\mathfrak{M} = M - Vx + (x - m)P$

$$\int_1^5 \mathfrak{M} ds = \int_1^2 \mathfrak{M} ds + \int_2^5 \mathfrak{M} ds.$$

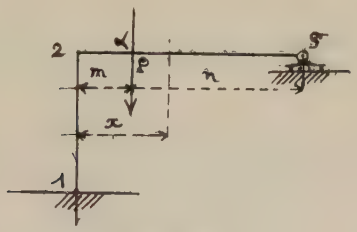


Fig. 123.

De 2 à 5 :

$$\int_1^2 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} = M \int_1^2 \frac{ds}{EI} = 1{,}4473\,M.$$

De α à 5 :

$$\int_2^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} = \int_2^5 (M - Vx) ds + \int_\alpha^5 (x - m) P ds,$$

$$\int_\alpha^5 x ds = {}_\alpha^5\left[\frac{x^2}{2}\right] = \frac{9^2 - m^2}{2}, \qquad \int_\alpha^5 ds = n,$$

$$P \int_\alpha^5 \frac{(x - m) ds}{EI} = \frac{P}{EI}\left(\int_\alpha^5 x ds - m \int_\alpha^5 ds\right) = \frac{P\left(\frac{9^2 - m^2}{2} - mn\right)}{54{,}1\,EI}.$$

$$\int_1^2 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} = \frac{1{,}4476\,M}{EI}$$

$$\int_2^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} = \frac{0{,}1663\,M}{EI}$$

d'où :

$$\int_1^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} = \frac{1{,}6136\,M}{EI} - \frac{0{,}7486\,V}{EI} + \frac{\left(\frac{9^2 - m^2}{2} - mn\right)}{54{,}1\,EI}.$$

Pour :

$$\int_1^5 \frac{\mathfrak{M} x ds}{EI}$$

calculons :

$$P \int_{\alpha}^{5} (x - m)\, x ds =$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\alpha}^{5} - m \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{5} = \frac{9^3 - m^3}{3} - m \frac{(9^2 - m^2)}{2}$$

et:

$$\int_{2}^{5} \frac{\mathfrak{M} x ds}{EI} = \frac{0,7486\ M}{EI} - \frac{4,4917\ V}{EI} + P \frac{\left[\frac{9^3 - x}{3} - m \frac{(9^2 - m^2)}{2}\right]}{54,1\ EI}$$

l'expression qui nous servira à exprimer que Δy_5 est nul sera :

$$\left.\begin{array}{l} 9\left[1,6136\ M - 0,7486\ V + P\left(\frac{9^2 - m^2}{2} - m\ n\right) : 54,1\right] \\ \qquad - 0,7486\ M - 4,4917\ V + P \frac{\left[\frac{9^3 - m^3}{3} \frac{m\,(9^2 - m^2)}{2}\right]}{54,1} \end{array}\right\} = 0.$$

6° Trois forces isolées d'intensité P sur la traverse 2-5.

Procédons maintenant au calcul des parenthèses pour les trois forces indiquées à la figure 124.

$$\frac{9^2 - 2,25^2}{2} - 2,25 \times 6,75 = 37,9683 - 15,1875 = 22,7812,$$

$$\frac{9^2 - 4,5^2}{2} - 4,50 \times 4,50 = 30,3750 - 20,2500 = 10,125,$$

$$\frac{9^2 - 6,75^2}{2} - 6,75 \times 2,25 = 17,188 - 15,1875 = 2,5315,$$

$$22,7812 + 10,125 + 2,5315 = 35,4375$$

$$\frac{9^3 - 2,25^3}{3} - 2,25 \frac{(9^2 - 2,25^2)}{2} = 239,2031 - 85,4287 = 153,7744$$

$$\frac{9^3 - 4,50^3}{3} - 4,5 \frac{(9^2 - 4,5^2)}{2} = 212,625 - 136,6875 = 75,9375,$$

$$\frac{9^3 - 6,75^3}{3} - 6,75 \frac{(9^2 - 6,75^2)}{2} = 140,484 - 119,6019 = 20,8825$$

$$153,7744 + 75,9375 + 20,8825 = 250,5944,$$

d'où :

$$9\,(1{,}6136\,M - 0{,}7486\,V - 35{,}4375 : 54{,}1) - 0{,}7486\,M - 4{,}4917\,V$$
$$- 250{,}5944\,P : 54{,}1 = 0.$$
$$13{,}7838\,M - 2{,}2447\,V + 1{,}2632\,P = 0,$$
$$V = \frac{-M + (6{,}75 + 4{,}5 + 2{,}25)}{9}\,P = -\frac{M}{9} + \frac{13{,}5\,P}{9} = 0{,}1111\,M + 1{,}5\,P$$
$$13{,}7838\,M - 2{,}2447\,(1{,}5\,P - 0{,}1111\,M) + 1{,}2632\,P = 0.$$
$$M = \frac{2{,}1039}{13{,}5344} = 0{,}1544\,P$$
$$V - 1{,}5\,P - 0{,}1111 \times 0{,}1554\,P = 1{,}5173\,P.$$

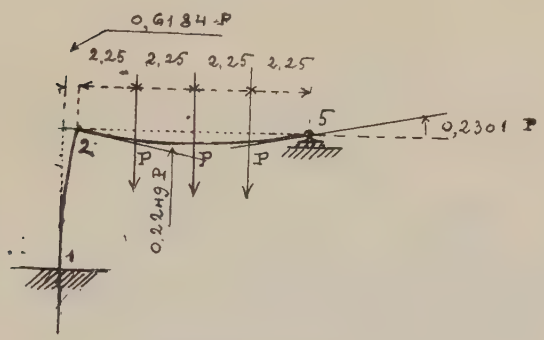


Fig. 124.

Calcul de $\Delta x_5 = \Delta x_2$.

$$\int_1^2 M ds = 1{,}4473 \times 0{,}1554\,P = 0{,}2249\,P.$$
$$\int_1^2 M y ds = 3{,}9803 \times 0{,}1554\,P = -0{,}6185.$$
$$\Delta x_2 = \frac{(5{,}5 \times 0{,}2249 - 0{,}6185)}{EI}\,P = \frac{0{,}6184\,P}{EI}.$$

Calcul de ω_2 *et* ω_5.

$$\omega_2 = -\int_1^2 \frac{M ds}{EI} = -\frac{0{,}2249\,P}{EI}$$
$$\omega_5 = -\int_1^5 \frac{M ds}{EI} =$$
$$= -1{,}1636\,M + 0{,}7486\,V - \frac{35{,}4375\,P}{54{,}1}$$
$$= -1{,}1636 \times 0{,}1554\,P + 0{,}7486 \times 1{,}5173\,P - 0{,}6550\,P = 0{,}2301\,P,$$

d'où :

$$\omega_5 = \frac{0{,}2301\,P}{EI}.$$

a'_1. — Méthode des appuis auxiliaires a rotule.

Calcul des coefficients de proportionnalité.

La construction correspondante pourvue d'appuis auxi-

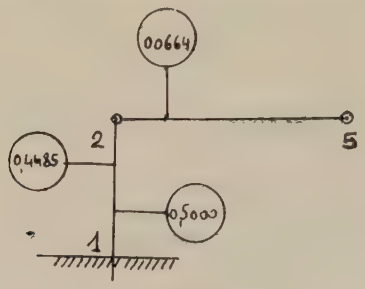


Fig. 125.

liaires à rotules fixées en 2 et 5 (fig. 125), on a comme coefficient de proportionnalité :

$$\mathcal{C}_{1-2} = 0{,}500,$$

$$\mathcal{C}_{2-5} = \frac{1}{2 - (2 - 0{,}5)\dfrac{5{,}5 \times 54{,}1}{9 \times 3{,}8}}\, 0{,}0664,$$

$$\mathcal{C}_{2-1} = \frac{1}{2 - \dfrac{2 \times 9 \times 3{,}8}{5{,}5 \times 54{,}1}} = 0{,}4485$$

1° Force horizontale appliquée F en 2 (fig. 126 et 127).

En prenant m_1 comme inconnue, on a immédiatement m_2 à l'aide de la formule 11 (§ 77), c'est-à-dire :

$$m_2 = -\frac{0{,}4485\,(1 + 0{,}500)\, m_1}{0{,}500\,(1 + 0{,}4485)} = -\,0{,}9289\, m_1.$$

L'action de F est équivalente à celle de :

$$\frac{1{,}9289\, m_1}{5{,}5}$$

d'où :

$$m_1 = \frac{5{,}5\,\mathrm{F}}{1{,}9289} = 2{,}8514\,\mathrm{F}.$$

et :

$$m_2 = 2{,}8514 \times 0{,}9289\,F = 2{,}6487\,F.$$

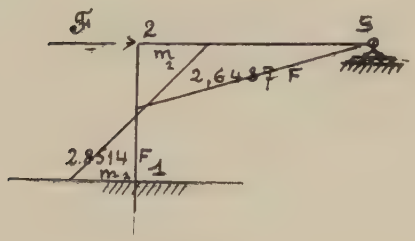


Fig. 126.

Déplacement linéaire de 2 (ou de 5).
(*formule 9* § 76) :

$$\lambda = \frac{(-2 \times 2{,}8514 + 2{,}6487)}{6 \times 3{,}8\,EI}\,5{,}5^2\,F = \frac{4{,}0520\,F}{EI}$$

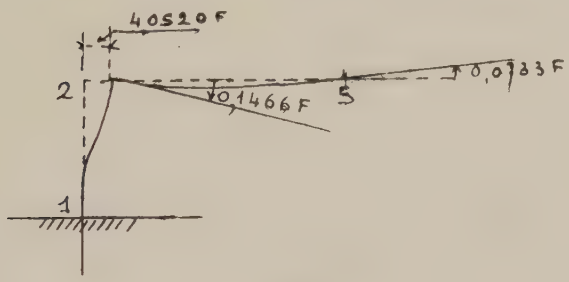


Fig. 127.

Déplacements angulaires en 2 et 5.
A l'aide de la formule 10 du § 76 on a :

$$\Omega_2 = -\frac{0{,}2027 \times 5{,}5}{2 \times 3{,}8\,I} = -\frac{0{,}1466\,F}{EI}$$

un seul moment existant en 2, on a :

$$\Omega_5 = -\frac{\Omega_2}{2}$$

$$\Omega_5 = \frac{0{,}1466\,F}{2\,EI} = \frac{0{,}0733\,F}{EI}.$$

2° Moment incident en 2 (fig. 128).

La construction étant considérée comme à appuis auxiliaires, appliquons le moment incident μ à l'œillet de l'appui 2.

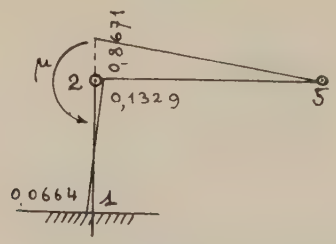


Fig. 128.

En se servant des formules 3 et 4 (§ 73), en écrivant que les déplacements angulaires autour de 2 sont égaux en valeurs absolues on a :

$$\frac{(2x - 0,5x)\,5,5}{6 \times 3,8EI} = \frac{2 \times 9y}{6 \times 54,1EI}$$

d'où :

$$x = 0,1532y$$

$$y + 0,1532y = \mu \qquad y = \frac{\mu}{1,1532} = 0,1329\mu.$$

La force d'entraînement est :

$$F = \frac{1,5 \times 0,1329}{5,5}\,\mu = 0,03624\mu.$$

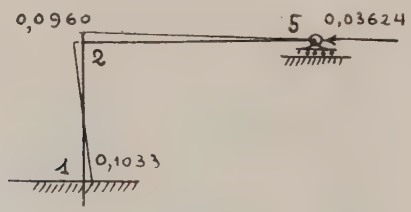


Fig. 129.

Ces moments correspondants sont :

$$0,03624 \times 2,8514\mu = 0,1033\mu$$
$$0,03624 \times 2,6487\mu = -0,0960\mu \quad \text{(fig. 129).}$$

lesquels ajoutés à ceux précédemment trouvés :

$$0{,}1033\mu - 0{,}0664\mu = 0{,}0369\mu$$
$$0{,}1329\mu - 0{,}0960\mu = 0{,}0369\mu \quad \text{(fig. 130).}$$

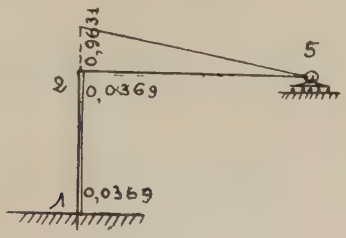


Fig. 130.

Les déplacements linéaires sont en appliquant la formule 9 :

$$\lambda = \frac{3 \times 0{,}0369 \times 9 \times 5{,}5^2\mu}{6 \times 3{,}8EI} = \frac{0{,}1468\mu}{EI}$$

et à l'aide de la formule 10 le déplacement angulaire en 2 :

$$\Omega_2 = \frac{2 \times 0{,}0369 \times 5{,}5\mu}{2 \times 3{,}8EI} = \frac{0{,}0534\mu}{EI} \quad \text{(fig. 131).}$$

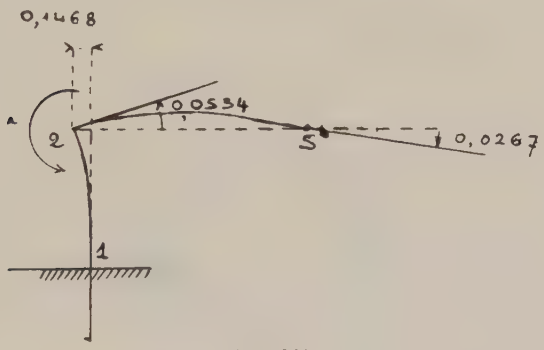


Fig. 131.

Comme :

$$\Omega_5 = -\frac{\Omega_2}{2}$$

on a :

$$\Omega_5 = -\frac{0{,}0534\mu}{2EI} = -\frac{0{,}0267\mu}{EI} \quad \text{(fig. 131).}$$

3° Moment incident en 5.

Comme ci-dessus, la construction (fig. 132) considérée

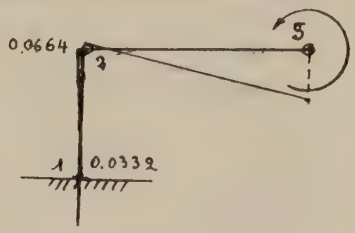


Fig. 132.

comme à appuis auxiliaires, appliquons le moment μ en 5, nous avons :

$$m_2 = -0{,}0664\mu$$
$$m_1 = -\frac{m_2}{2} = 0{,}0332\mu.$$

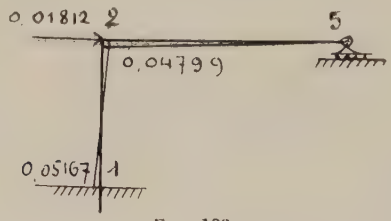


Fig. 133.

Force d'entraînement (fig. 133).

$$\frac{0{,}0664 \times 1{,}5\mu}{5{,}5} = 0{,}01812\mu$$

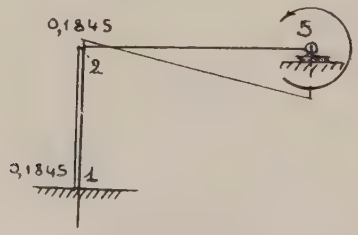


Fig. 134.

provoquant les moments d'entraînement :

$$-2{,}8514 \times 0{,}01812\mu = 0{,}05167\mu$$
$$2{,}6487 \times 0{,}0182\mu = 0{,}04799\mu$$

à ajouter à ceux précédemment trouvés (fig. 134).

$$0{,}05167\mu - 0{,}0322\mu = 0{,}01845\mu$$
$$0{,}06644\mu - 0{,}04799\mu - 0{,}01845\mu.$$

Déplacements linéaires et angulaires.

$$\lambda = \frac{3 \times 0{,}01845 \times 5{,}5^2\mu}{6 \times 3{,}8\,EI} = \frac{0{,}07345\mu}{EI}$$
$$\Omega_2 = -\frac{2 \times 0{,}01845 \times 5{,}5\mu}{2 \times 3{,}8EI} = -\frac{0{,}02669\mu}{EI}$$
$$\Omega_5 = \frac{(0{,}1845 - 2)\mu}{6 \times 54{,}1\,EI} = \frac{0{,}05494\mu}{EI} \quad \text{(fig. 135).}$$

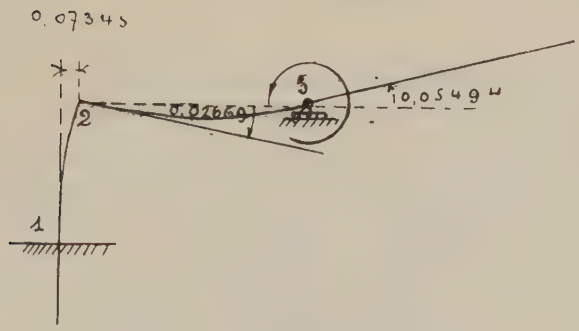


Fig. 135.

4° Charge de q par mètre courant, uniformément répartie (fig. 136).

Méthode des encastrements auxiliaires.

Supposons qu'en chacun des points 2 et 5 existe un

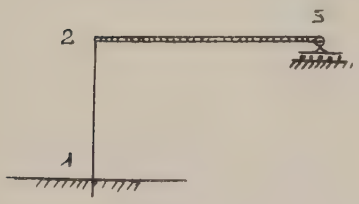


Fig. 136.

Fig. 137.

encastrement qui provoque des moments ayant pour valeur $\frac{ql^2}{12}$ et $\frac{-ql^2}{12}$ (fig. 137);

Appliquons à la construction à l'état naturel, deux couples de signes inverses à ceux-ci, aux points où ils existent (fig. 138).

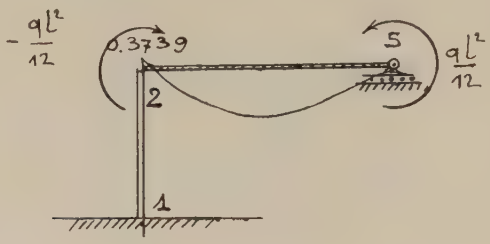


Fig. 138.

Prenons les chiffres trouvés aux deux calculs précédents et l'on a ainsi pour les moments qui se trouvent en 1 et 2 :

$$(0{,}0369 + 0{,}0185)\,\frac{ql^2}{12} = \frac{0{,}0554 \times 9^2}{12} = 0{,}3739q$$

à l'aide de la formule 9, nous avons :

$$\lambda = \frac{3 \times 0{,}3739 \times 5{,}5^2 q}{6 \times 3{,}8\,\mathrm{EI}} = \frac{1{,}5014q}{\mathrm{EI}}.$$

On a les déplacements angulaires à l'aide des expressions obtenues aux deux calculs précédents (fig. 139) :

$$\Omega_2 = -\frac{(0{,}0534 + 0{,}0267)\,9^2 q}{12\,\mathrm{EI}} = -\frac{0{,}5407q}{\mathrm{EI}}$$

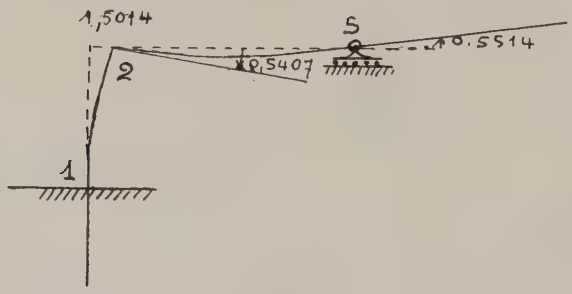


Fig. 139.

et :

$$\Omega_5 = \frac{(0{,}0267 + 0{,}0549)\,9^2 q}{12\mathrm{EI}} = \frac{0{,}5514q}{\mathrm{EI}}.$$

5° Charges isolées (fig. 140).

Soient les trois charges verticales d'intensité P placées en α, β et γ comme indiqué sur la figure 140.

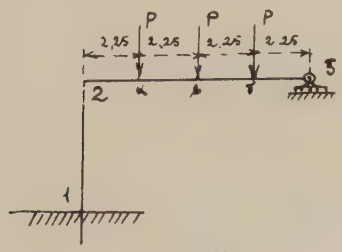


Fig. 140.

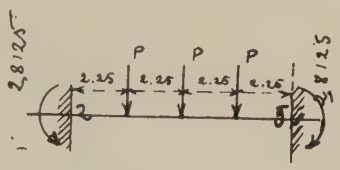


Fig. 141.

Supposons qu'en 2 et 5 existent des encastrements, on a, en 2, les moments d'encastrements ci-après (fig. 141) :

$$M\alpha = \frac{2,25 \times 6,75^2 P}{9^2} = \frac{102,5156P}{9^2}$$

$$M\beta = \frac{4,5 \times 4,5^2 P}{9^2} = \frac{91,1250P}{9^2}$$

$$M\gamma = \frac{6,75 \times 2,25^2 P}{9^2} = \frac{34,1719P}{9^2}.$$

Soit :

$$\frac{(102,5156 + 91,1250 + 34,1719)\,P}{9^2} = 2,8125\ P.$$

On aura le même moment d'encastrement en 5 ; en appliquant à la construction à l'état naturel le moment

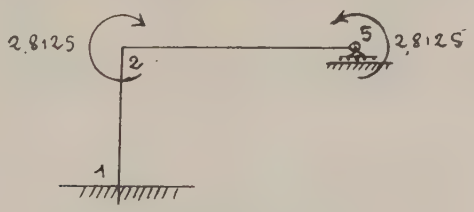


Fig. 142.

incident — 2,8125 P en 2 et le moment incident + 2,8125P en 5 (fig. 142), en ajoutant les résultats obtenus aux

moments de flexion de la traverse encastrée, on obtient (fig. 143) :

$$0{,}0369 \times 2{,}8125\,P$$
$$0{,}9184 \times 2{,}8125\,P$$
$$0{,}0553 \times 2{,}8125\,P = 0{,}1555\,P$$
$$\lambda = \frac{3 \times 0{,}1555 \times 5{,}5^2 P}{6 \times 3{,}8EI} = \frac{0{,}6189P}{EI}.$$

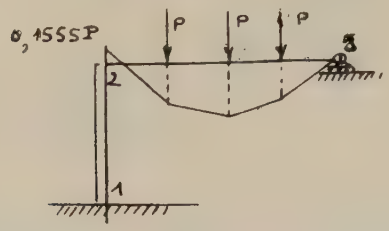


Fig. 143.

Quant aux déplacements angulaires, on les a, à l'aide de

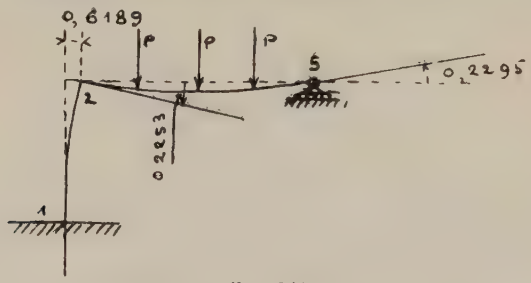


Fig. 144.

ceux obtenus aux moments incidents appliqués en 2 et 5, c'est-à-dire (fig. 144) :

$$\Omega_2 = -\frac{(0{,}0534 + 0{,}0267) \times 2{,}8125P}{EI} = -\frac{0{,}2253P}{EI}$$
$$\Omega_5 = \frac{(0{,}0267 + 0{,}0549) \times 2{,}8125P}{EI} = \frac{0{,}02296P}{EI}.$$

DEUXIÈME TRAVÉE

2. — Méthode directe.

Prenons maintenant la portion 6, 5, 7, 8 (fig. 145) dont les appuis 6 et 8 sont à encastrement et pour laquelle les

moments d'inertie des éléments sont 4,2 I ; 10,1 I ; 5,1 I , I étant leur commune mesure.

Déterminons, pour une force horizontale et un moment incident appliqués en 5, une charge donnée uniformément

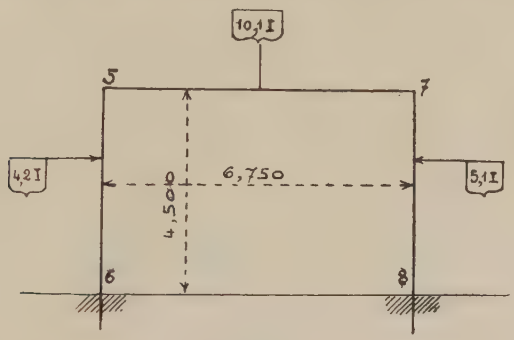


Fig. 145.

répartie, et deux forces verticales qui agissent sur la traverse 5-7 : les moments de flexion, les déplacements linéaires et angulaires en 5.

a_2. — Méthode directe.

Il nous faut pour cela connaître les caractéristiques d'utilisation et procéder aux intégrations suivantes :

$$\int_6^5 ds = 4,5 \qquad \int_5^7 ds = 6,75 \qquad \int_7^8 ds = 3,5$$

$$\int_6^5 x ds = 0 \qquad \int_5^7 x ds = {}_5^7\left[\frac{x^2}{2}\right] = \frac{6,75^2}{2} = 22,7813$$

$$\int_7^8 x ds = 6,75 \qquad \int_6^5 ds = 6,75 \times 4,50 = 30,375$$

$$\int_6^5 y ds = {}_6^5\left[\frac{y^2}{2}\right] = \frac{4,5^2}{2} = 10,1250$$

$$\int_5^7 y ds = 4,5 \int_5^7 ds = 4,5 \times 6,75 = 30,375$$

$$\int_7^8 y ds = {}_8^7\left[\frac{y^2}{2}\right] = \frac{4,5^2}{2} = 10,125$$

$$\int_6^5 x^2 ds = \int_6^5 x^2 ds = {}_6^5\left[\frac{x^3}{3}\right] = \frac{6,75^3}{3} = 102,5156$$

$$\int_7^8 x^2 ds = 6,75^2 \int_7^8 ds = 6,75^2 \times 4,5 = 205,0313$$

$$\int_6^5 y ds = {}_6^5\left[\frac{y^3}{3}\right] = \frac{4,5^3}{3} = 30,3750$$

$$\int_5^7 y^2 ds = y^2 \int_5^7 ds = 4,5^2 \times 6,75 = 136,8875$$

$$\int_7^8 y^2 ds = {}_7^8\left[\frac{y^3}{3}\right] = 30,3750$$

$$\int_6^5 xyds = 0 \qquad \int_5^7 xyds =$$

$$= \int_5^7 xds = 4,5 \times 22,7813 = 102,5158$$

$$\int_7^8 xyds = 6,75 \int_7^8 yds = 6,75 \times 10,125 = 68,3437.$$

Nous avons ainsi le tableau des caractéristiques simples : 88.

	6 à 5	5 à 7	7 à 8
$\int ds$	4,500	6,750	4,500
$\int xds$	0	22,7813	30,3750
$\int yds$	10,1250	30,3750	10,1250
$\int x^2 ds$	0	102,5156	205,0313
$\int y^2 ds$	30,3750	136,6875	30,3750
$\int xyds$	0	102,5156	68,3537

Les caractéristiques d'utilisation seront obtenues en divisant la première colonne par *4,2*; la deuxième par *10,1* et la troisième par *5,1*, soit :

	6 à 5	5 à 7	7 à 8
$\int ds$	1,0714	0,6683	0,8823
$\int xds$	0	2,2555	5,9559
$\int yds$	2,4107	3,0074	1,9853
$\int x^2 ds$	0	10,1501	40,2022
$\int y^2 ds$	7,2321	13,5334	4,9559
$\int xyds$	0	10,1501	13,4007

1° Force horizontale F et moment incident appliqué en 5 (fig. 146 et 147).

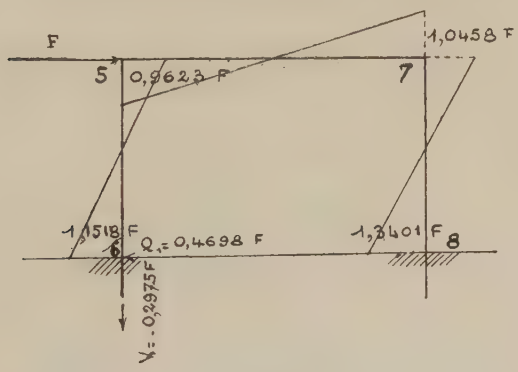


Fig. 146.

Les moments suivant la fibre moyenne sont :

de 6 à 5. . . $\mathfrak{M} = M_6 + Q_6 y$
5 à 7. . . $\mathfrak{M} = M_6 + Q_6 y - V_6 x + \mu$
7 à 8. . . $\mathfrak{M} = M_6 - Q_6 y - V_6 x + \mu - (4,5 - y) F$.

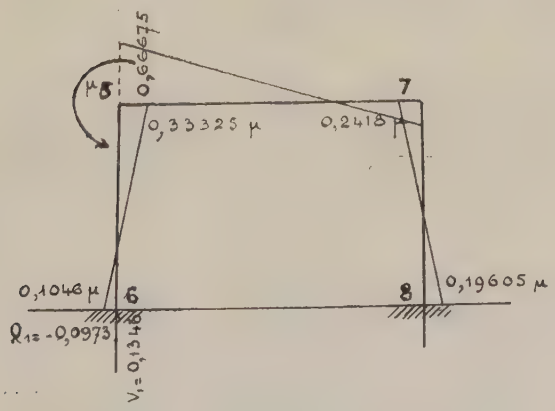


Fig. 147.

Pour avoir les réactions M_6, Q_6 et V_6 ainsi que les déplacements linéaires et angulaires du point 5, calculons :

$$\int_6^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI}, \int_6^5 \frac{\mathfrak{M} x ds}{EI} \text{ et } \int_6^5 \frac{\mathfrak{M} y ds}{EI}.$$

1° Calcul de $\int_6^8 \mathfrak{M}ds$; comme dans la suite des opérations les coefficients E et I disparaissent, nous ne les ferons pas figurer dans celle-ci. Pour raison typographique nous supprimerons les indices de M_6, Q_6, V_6.

$$\int_6^8 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} = \int_6^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} + \int_5^7 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} + \int_7^8 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI}$$

de 6 à 5) . . $M\int_6^5 \frac{ds}{4,2} + Q\int_6^5 \frac{yds}{4,2} = 1,0714M + 2,4107Q$

de 5 à 7) . . $M\int_5^7 \frac{ds}{10,1} + Q\int_5^7 \frac{yds}{10,1} - V\int_5^7 \frac{xds}{10,1}$

$$+ \mu\int_5^7 \frac{ds}{10,5}$$

soit :

$$0,6683M + 3,0074Q - 2,2555V + 0,6683\mu$$

de 7 à 8) . . $M\int_7^8 \frac{ds}{5,1} + Q\int_7^8 \frac{yds}{5,1} - V\int_7^8 \frac{xds}{5,1}$

$$+ \mu\int_7^8 \frac{ds}{5,1} - \int_7^8 \frac{(4,5-y)\,Fds}{5,1}$$

soit :

$$0,8823M + 1,9833Q - 5,9559V + 0,8823\mu + 1,9853F$$

donc :

$$\begin{array}{llll}
1,0714 & + 2,4107Q & & \\
0,6683 & + 3,0074 & - 2,2555V & + 0,6683\mu \\
0,8823 & + 1,9853 & 5,9559 & + 0,8823 \quad + 1,9853F \\
\hline
2,622\,)M & + 7,4030Q & - 8,2114V & + 1,5506\mu \quad + 1,9853F.
\end{array}$$

2° $$\int_6^8 \frac{Mxds}{EI}$$

$$M\int_6^5 \frac{xds}{4,2} + Q\int_6^5 \frac{xyds}{4,2} = 0$$

$$M\int_5^7 \frac{xds}{10,1} + Q\int_5^7 \frac{xyds}{10,1} - V\int_5^7 \frac{xds}{10,1} + \mu\int_5^7 \frac{xds,}{10,1}$$

$$2,2555M + 10,1501Q - 10,15\,)1V + 2,2555\mu$$

$$M\int_7^8 \frac{x^2ds}{5,1} + Q\int_7^8 \frac{xyds}{5,1} - V\int_7^8 \frac{xds}{5,1} + \mu\int_7^8 \frac{xds}{5,1}$$

$$- \int_7^8 \frac{(4,5-y)}{5,1}\, xFds$$

$$5,9559M + 13,4007Q - 40,2022V + 5,9559\mu - 13,4007F$$

donc :

$$\begin{array}{l}
2{,}2555M + 10{,}1501\,Q - 10{,}1501V + 2{,}2555\mu \\
5{,}9559 \quad + 13{,}4007 \quad - 40{,}2022 \quad + 5{,}9559 \quad - 13{,}4017F \\
\hline
8{,}2114M + 23{,}5508Q - 50.3523V + 8{,}2114\mu - 13{,}4017F.
\end{array}$$

3°
$$\int_6^8 \frac{\mathfrak{M}yds}{EI}$$

$$M\int_6^5 \frac{yds}{4{,}2} + Q\int_6^5 \frac{yds}{4{,}2}$$

soit :

$$2{,}4107M + 7{,}2321Q$$

$$\int_5^7 \frac{yds}{10{,}1} + Q\int_5^7 \frac{y^2ds}{10{,}1} - V\int_5^7 \frac{xyds}{10{,}1} + \mu\int_5^7 \frac{yds}{10{,}1}$$

soit :

$$3{,}0074M + 13{,}5334Q - 10{,}1501V + 3{,}0074\mu$$

$$M\int_7^8 \frac{yds}{5{,}1} + Q\int_7^8 \frac{y^2ds}{5{,}1} - V\int_7^8 \frac{xyds}{5{,}1} + \int_7^8 \frac{\mu yds}{5{,}1}$$

$$-\int_7^8 \frac{(4{,}5 - y)}{5{,}1}\, yFds$$

soit :

$$1{,}9853M + 5{,}9559Q - 13{,}4007\,V + 1{,}9853\mu - 2{,}9779F$$

donc :

$$\begin{array}{l}
2{,}4107M + 7{,}2321Q \\
3{,}0074 \quad + 13{,}5334 \quad - 10{,}1501V - 3{,}0074\mu \\
1{,}9853 \quad + 5{,}9559 \quad - 13{,}4007 \quad + 1{,}9853 \quad - 2{,}9779F \\
\hline
7{,}4034M + 26{,}7215Q - 22{,}5508V + 4{,}9927\mu - 2{,}9779F.
\end{array}$$

Nous avons enfin le système de 3 équations à trois inconnues :

$$\begin{array}{l}
2{,}6220M + 7{,}4035Q - 8{,}2114\,V = -1{,}5506\mu + 1{,}9853F \\
7{,}4034M + 26{,}7215Q - 23{,}5508\,V = -4{,}9927\mu + 2{,}9779F \\
8{,}2114M + 23{,}5508Q - 50{,}3523\,V = -8{,}2114\mu + 13{,}4017F
\end{array}$$

Résolution par la méthode des coefficients indéterminés.

Calcul de M.

$$\begin{array}{l}
-(2{,}6220 + 7{,}4034\alpha + 8{,}2114\beta)\,M \\
+(7{,}4035 + 26{,}7215\alpha + 23{,}5508\beta)\,Q \\
-(8{,}2114 + 23{,}5508\alpha + 50{,}3523\beta)\,V \\
\qquad = A + B\alpha + C\beta.
\end{array}$$

Posons :

$$A = -1,5506\mu + 1,9853F$$
$$B = -4,9927\mu + 2,9779F$$
$$C = -8,2114\mu + 13,4017F$$
$$26,7215\alpha + 23,5508\beta = -7,4035$$
$$23,5508\alpha + 50,3523\beta = -8,2114$$
$$(26,7215 + 23,5508\Delta)\alpha + (23,5508 + 50,3523\Delta)\beta$$
$$= -(7,4035 + 8,2114\Delta).$$

Pour α :

$$\Delta = -\frac{23,5508}{50,3523} = 0,4677$$
$$(26,715 - 23,5508 \times 0,4677)\alpha = -(7,4035 - 8,2114 \times 0,4667)$$
$$15,7068\alpha = -3,5630$$
$$\alpha = -\frac{3,5630}{15,7068} = -0,2268.$$

Pour β :

$$-23,5508 \times 0,2268 + 50,3523\beta = -8,2114$$
$$\beta = -\frac{2,8701}{50,3523} = -0,0570.$$

On aura donc :

$$(2,6220 - 7,4034 \times 0,2268 - 8,2114 \times 0,0570)\,M_1$$
$$= -1,6506\mu + 1,9853F$$
$$-(-4,9927\mu - 2,9979F)\,0,2268$$
$$-(-8,2114\mu - 13,4017F)\,0,0570,$$

d'où M :

$$M = +\frac{0,0497}{0,4749}\mu + \frac{0,5470}{0,4749}F$$
$$M = +0,1046\mu + 1,1518F.$$

Calcul de Q :

$$7,4035\alpha + 8,2114\beta = -2,6220$$
$$23,5508\alpha + 50,3523\beta = -8,2114$$
$$(7,4035 + 23,5508\Delta)\alpha + (8,2114 + 50,3523\Delta)\beta$$
$$= -(2,6220 + 8,2114\Delta)$$
$$8,2114 + 50,3523\Delta = 0$$
$$\Delta = -\frac{8,2114}{50,3523} = -0,16307.$$

Pour α :

$$74,035 - 23,5508 \times 0,16307\alpha = -(2,6220 - 8,2114 \times 0,16307)$$
$$\alpha = -\frac{1,2836}{3,6281} = -0,3601.$$

Pour β :

$$-23,5508 \times 0,3601 + 50,3523\beta = -8,2114$$
$$\beta = -\frac{0,2692}{5,0353} = -0,00534,$$

d'où Q :

$$(7,4034 - 26,7215 \times 0,3601 + 23,5508 \times 0,0053)\,Q_1$$
$$= (-1,5506\mu + 1,9853\,F)$$
$$-(-4,9927\mu + 2,9779\,F) \times 0,3601$$
$$+(-8,2114\mu + 13,4017\,F) \times 0,0053$$
$$Q_1 = -\frac{0,2038}{2,0924}\mu - \frac{0,9840}{2,0924}F = -0,0973\,\mu - 0,4698\,F.$$

Calcul de V :

$$8,2114\,V = 1,5506\mu - 1,19853\,F$$
$$+ 2,6220\,M + 7,4035\,Q$$
$$2,6220\,(0,1046\mu + 1,1518\,F) = +0,2742\mu + 3,0200\,F$$
$$7,4035\,(0,0973\mu - 0,4698\,F) = -0,7193\mu - 3,4781\,F$$
$$V = \frac{1,1055}{8,2114}\mu - \frac{2,4434}{8,2114}F = 0,1346\mu - 0,2975\,F.$$

Calcul de Ω_5 :

$$\Omega_5 = -\int_6^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} = -\frac{1,0714}{EI}M - \frac{2,4107}{EI}Q$$
$$1,0714\,M = 1,0714\,(+0,1046\,\mu + 1,1518\,F) = +0,1120\,\mu + 1,2340\,F$$
$$2,4107\,Q = 2,4107\,(-0,0973\,\mu - 0,4698\,F) = -0,2345\,\mu - 1,1325\,F$$
$$\Omega_5 = (-0,1120\mu - 1,2340\,F + 0,2345\mu + 1,1325\,F) : EI,$$

soit :

$$\Omega_5 = +\frac{0,1225}{EI}\mu - \frac{0,1015}{EI}F.$$

Calcul de Δx_5 :

$$\Delta x_5 = \int_6^5 \frac{\mathfrak{M}}{EI}(y_5 - y)\,dy = y_5\int_6^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} - \int_6^5 \frac{\mathfrak{M}yds}{EI}$$
$$\int_6^5 \mathfrak{M}yds = M\int_6^5 \frac{yds}{4,2} + Q\int_6^5 \frac{y^2ds}{4,2} = 2,4107\,M + 7,2321\,Q$$
$$2,4107\,(+0,1046\mu + 1,1518\,F)$$
$$7,2321\,(-0,0973\mu - 0,4698\,F)$$
$$(+0,2523\mu + 2,7766\,F - 0,7037\mu - 3,3976\,F) : EI$$
$$= -\frac{(0,4514 + 0,6210)}{EI}F$$
$$y_5\int_6^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} = 4,5\int \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} = -\frac{4,5 \times 0,1225\mu}{EI} + \frac{4,5 \times 0,1015\,F}{EI}$$
$$= \frac{-0,5513\mu + 0,4567\,F}{EI}$$
$$\Delta x_5 = (-0,5513\mu + 0,4567\,F + 0,4514\mu + 0,6210\,F) : EI$$
$$\Delta x_2 = \frac{-0,0999\mu + 1,0777}{EI}F,$$

2° Charge uniformément répartie p sur la traverse 5-7 (fig. 148).

Les intégrales caractéristiques supplémentaires à chercher correspondent à :

De 5 à 7 . . . . . $\dfrac{px^2}{2 \times 10,1}$

De 7 à 8 . . . . . $\dfrac{pl^2}{2 \times 5,1}$.

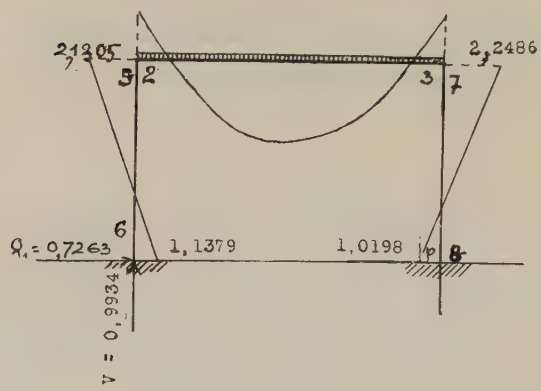


Fig. 148.

Nous avons donc, comme termes additifs :

Pour :

$$\int_5^7 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{p}{2}\int_5^7 \frac{x^2ds}{10,1\,EI} = \frac{p}{2} \times \frac{10,1501}{EI}$$

$$\int_7^8 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{p}{2}\int_7^8 \frac{x^2ds}{5,1\,EI} = \frac{p}{2} \times \frac{40,2022}{EI},$$

donc :

$$\int_5^8 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} = \frac{50,3523}{2EI}\,p = \frac{25,1761}{EI}\,p.$$

Pour :

$$\int_5^7 \frac{\mathfrak{M}yds}{EI} = \frac{p}{2}\int_5^7 \frac{x^2yds}{10,1\,EI} = \frac{4,5}{2}\,p\int_5^7 \frac{x^2ds}{10,1\,EI} = \frac{22,8377}{EI}\,p$$

et :

$$\frac{p}{2}\int_7^8 \frac{x^2yds}{5,1} = \frac{p}{2}\,6,75^2\int_7^8 \frac{yds}{5,1} = 45,2276p,$$

donc :

$$\int_5^8 \frac{\mathfrak{M} y ds}{EI} = \frac{68,0653}{EI} p.$$

Pour :

$$\int_5^7 \mathfrak{M} x ds : \int^7 \frac{p x^3 ds}{2 \times 10,1} = \frac{p x^4}{2 \times 4 \times 10,1} = 25,6923\, p$$

$$\int_7^8 \frac{p x^3 ds}{2 \times 5,1} = -\frac{6,75^3 \times 4.5}{2 \times 5,1} p = 135,6824 p,$$

donc :

$$\int_5^8 \frac{\mathfrak{M} x ds}{EI} = \frac{161,3774}{EI} p.$$

Calcul de M. — Il est inutile de résoudre à nouveau les équations, car on a :

$$\begin{aligned} &-25,1761\, p \\ &+ 0,2268 \times 68,0653 p = 15,4372 p \\ &+ 0,0570 \times 161,3774 p = 9,1981 p \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 24,6357 p \end{aligned}$$

$$-25,1761 p + 24,6357 p = -0,5404 p$$

$$M = -\frac{0,5404}{0,4749} p = -1,1379 p.$$

Calcul de Q. — Pareillement on a :

$$\begin{aligned} &-25,1761\, p \\ &0,3601 \times 68,0653 p = 24,5103 p \\ &-0,0053 \times 161,3774 p = -0,8553 p \end{aligned}$$

$$-25,1761 p - 0,8553 p + 24,5103 p = 1,5211 p,$$

d'où :

$$Q = -\frac{1,5211}{2,0941} p = 0,7263 p.$$

Calcul de V :

$$8,2114 V = 25,1761 p + 2,6220 M + 7,4035 Q$$

$$+ 25,1761 p - 2,6220 \times 1,1379 p + 7,4035 \times 0,7263 p$$

$$8,2114 V = 25,1761 p - 2,9836 p + 5,3772 p$$

$$V = \frac{8,1582 P}{8,2114} = 0,9934 P.$$

Calcul de Ω_5 :

$$Q_5 = -\int_6^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} = \frac{1,0714 M + 2,4107}{EI} Q$$

$$= \frac{1,10714 \times 1,1379 p - 2,4107 \times 0,7263 p}{EI} = \frac{0,5318}{EI} p.$$

Calcul de Δx_5 :

$$\frac{2{,}4107\,M + 7{,}2321\,Q}{EI} = 4{,}5 \int_6^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI}$$

$$= \frac{-2{,}4107 \times 1{,}1379p + 7{,}2321p \times 0{,}7263p - 4{,}5 \times 0{,}5318p}{EI}$$

$$= \frac{0{,}1169}{EI}\,p.$$

3° Cas de deux forces verticales sur la traverse 5-7 (fig. 149).

Comme au problème précédent, il suffit de calculer les caractéristiques tout d'abord pour une charge P.

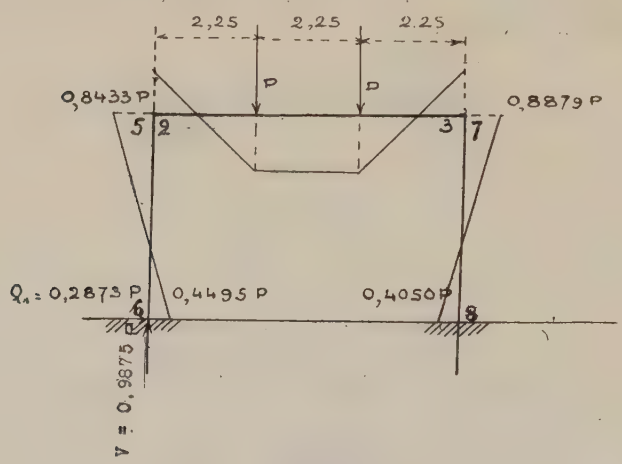


Fig. 149.

Les moments de flexion correspondants sont :

De α à 7 est $P(x - m)$.
De 7 à 8 Pn

1° *Calcul de* $\int_\alpha^8 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI}$:

$$\int_\alpha^7 \mathfrak{M}ds = \frac{P\int_\alpha^7 (x - m)\,ds + P\int_\alpha^7 \alpha ds}{10{,}1} = \frac{P\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^7 + mp\left[x\right]_\alpha^7}{10{,}1}$$

$$= \frac{P(6{,}75^2 - m)}{2} - mnP.$$

Pour les deux forces situées à 2,25 et 4,50 du point 5, on a :

$$\left(6,75^2 - \frac{2,25^2 + 4,50^2}{2}\right) P = 32,9062\,P.$$

Pour $-mnP$, de même :

$$-2 \times 2,25 \times 4,50\,P = -2,025\,P,$$

donc :

$$32,9062 - 20,2500 = 12,6562$$
$$12,6562 : 10,1 = 1,2531\,P.$$

Pour $\int_7^8 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI}$, on a :

$$Pn\int_7^8 \frac{\mathfrak{M}ds}{5,1} = \frac{P \times 6,75 \times 4,5}{5,1} = 5,9559\,P.$$

Finalement :

$$\int_\alpha^8 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} = (1,2531 + 5,9559)\,P = 7,2090\,P.$$

2° *Calcul de* $\int_\alpha^8 \frac{\mathfrak{M}yds}{EI}$:

My est de α à 7 . . . . . $P(xy - my)$
My est de 7 à 8 . . . . . Pny.

Nous effectuons de suite le calcul pour les deux forces P_1 et P_2 : pour α à 7, y est constant et égal à 4,5, on a donc le premier terme de l'intégrale précédente multipliée par 4,5, soit :

$$1,2531 \times 4,5 = 5,6389\,P.$$

$$P(2,25 + 4,50)\int_7^8 \frac{yds}{5,1},$$

de 7 à 8, c'est-à-dire :

$$6,75 \times 1,9353\,P = 13,4008\,P$$

et finalement pour les deux forces :

$$\int_\alpha^8 \frac{\mathfrak{M}yds}{EI} = \frac{(5,6389 + 13,4008)\,P}{EI} = \frac{19,0397\,P}{EI}.$$

3° *Calcul de* $\int_{\alpha}^{8} \frac{\mathfrak{M} x ds}{EI}$:

Pour α à 7 . . . . . $P(x - mx)$
— 7 à 8 . . . . . Pnx.

$$\int_{\alpha}^{7} \frac{\mathfrak{M} x ds}{EI} = P \int_{\alpha}^{7} x^2 ds - Pm \int_{\alpha}^{7} x ds = P \frac{(x^3 - m^3)}{3} - Pm \frac{(x^2 - m^2)}{2}.$$

Pour les deux forces, on a :

$$\frac{\frac{P}{3}\begin{bmatrix} 6,75^3 - 2,25^3 \\ 6,75^3 - 4,50^3 \end{bmatrix} - \frac{P}{2}\begin{bmatrix} 2,25\,(6,75^2 - 2,25^2) \\ 4,50\,(6,75^2 - 4,50^2) \end{bmatrix}}{EI} = \frac{6,7667\ P}{EI}$$

$$P \int_{7}^{8} nx ds = P \times 6,75\,(4,50 + 2,25) \times 4,50 = 205,0312\,P,$$

$$P \int_{7}^{8} \frac{nx ds}{EI} = \frac{205,0312\,P}{5,1\,EI} = \frac{40,2021\,P}{EI},$$

et finalement:

$$\int_{\alpha}^{8} \frac{\mathfrak{M} x dx}{EI} = \frac{46,9688}{EI}.$$

Calcul de M :

$$\begin{aligned} &- 7,2090\,P \\ &+ 0,2268 \times 19,0397 = 4,3182 \\ &+ 0,0570 \times 46,9688 = 2,6772 \\ M = &\frac{0,2136}{0,4749}\,P = - 0,4495\,P. \end{aligned}$$

Calcul de Q :

$$\begin{aligned} &- 7,2090\,P \\ &+ 0,3601 \times 19,0397\,P = 6,8562\,P \\ &- 7,2090\,P + 6,8562\,P - 0,2489\,P = - 0,6017\,P \\ Q = &\frac{- 0,6017}{- 2,0942}\,P = 0,2873\,P. \end{aligned}$$

Calcul de V :

$$8,2114\,V = 7,2090\,P - 2,6220\,M + 7,4035\,Q$$
$$8,2114\,V = 7,2090\,P - 2,6220 \times 0,4495\,P + 7,4035 \times 0,2873\,P$$
$$V = \frac{8,1038\,P}{8,2114} = 0,9875\,P.$$

Calcul de Ω_5 *:*

$$\Omega_5 = -\int_6^5 \frac{M ds}{EI} = -\frac{1,0714\,M}{EI} - \frac{2,4107\,Q}{EI}$$

$$+ 1,0714 \times 0,4495 = 0,4816$$
$$- 2,4107 \times 0,2873 = - 0,6946$$
$$\Omega_5 = \frac{-0,6946\,P + 0,4816\,P}{EI} = -\frac{0,2130\,P}{EI}.$$

Calcul de Δx_5 *:*

$$2,4107\,M + 7,2321\,Q = - 2,4107 \times 0,4495\,P$$
$$+ 7,2321 \times 0,2873\,P$$
$$= - 1,0836\,P + 2,0778\,P = 0,9942\,P$$
$$- 4,5 \times 0,2130\,P = - 0,9585\,P$$
$$\Delta x_5 = \frac{0,9942\,P - 0,9585\,P}{EI} = \frac{0,0357\,P}{EI}.$$

a'_2 Méthode des appuis auxiliaires.

1° Calculs des coefficients de proportionnalité, la cons-

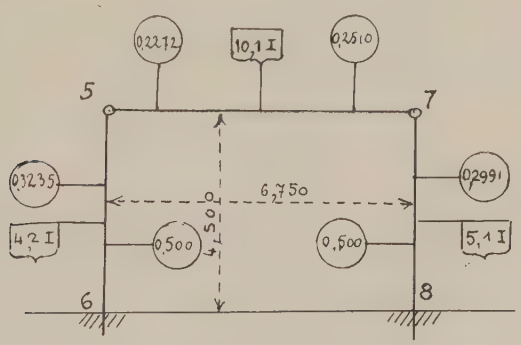


Fig. 150.

truction étant pourvue d'appuis auxiliaires en 5 et 7 (fig. 150), en appliquant la formule 6 du § 74.

$$\rho_{6-7} = 0,500$$

$$\rho_{5-7} = \frac{1}{2 + (2 - 0,5) \times \dfrac{4,5 \times 10,1}{6,75 \times 4,2}} = 0,2272$$

$$\rho_{7-8} = \frac{1}{2 + (2 - 0,2272)\,\dfrac{6,75 \times 5,1}{4,5 \times 10,1}} = 0,2991$$

$$\rho_{8-7} = 0,500$$

$$\rho_{7-5} = \frac{1}{2 + (2 - 0,5)\dfrac{4,5 \times 10,1}{6,75 \times 5,1}} = 0,2510$$

$$\rho_{5-6} = \frac{1}{2 + (2 - 0,25)\dfrac{6,75 \times 4,2}{4,5 \times 10,1}} = 0,3235.$$

1° Force horizontale F appliquée en 5.

Méthode des déplacements successifs.

La déformation représentée par la figure 155 peut être considérée comme deux déformations successives, des appuis auxiliaires étant placés en 5 et 7, la première étant celle d'amener 6 en 6′ (fig. 151).

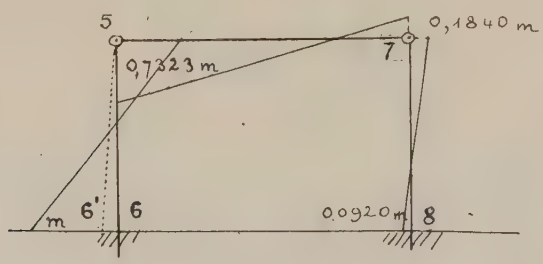


Fig. 151.

Le moment élémentaire en 6 est m, celui en 5 est donné par :

$$m_5 = -\frac{0,3235\,(1 + 0,500)}{0,500\,(1 + 0,3235)} = -0,7333\,m$$

et, d'après les coefficients de proportionnalité :

$$m_7 = 0,7333 \times 0,2510 = 0,1840\,m$$
$$m_8 = 0,500 \times 0,1840 = 0,920\,m.$$

Pour le deuxième déplacement élémentaire qui consiste

à amener 8 en 8′; nous avons en 8 un moment élémentaire p, en 7 (fig. 152),

$$p_7 = -\frac{0,2991\,(1 + 0.500)}{0,500\,(1 + 0,2991)} = -0,6907\,p$$
$$p_5 = 0,6907 \times 0,2272 = 0,1569\,p$$
$$p_6 = -0,1569 \times 0,500 = -0,0784\,p$$

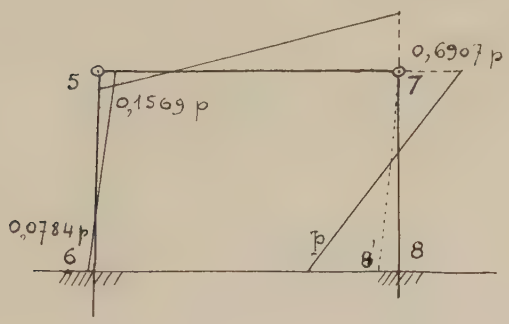


Fig. 152.

Pour le premier déplacement, nous avons :

$$\lambda = \frac{(2\,m - 0,7333\,m) \times 4,5^2}{4,2\,EI},$$

et pour le deuxième pareillement :

$$\lambda = \frac{(2p - 0,6907\,p) \times 4,5^2}{5,2\,EI},$$

d'où :

$$p = \frac{1,2667 \times 5,1\,m}{4,2 \times 1,3093} = -1,1729\,m.$$

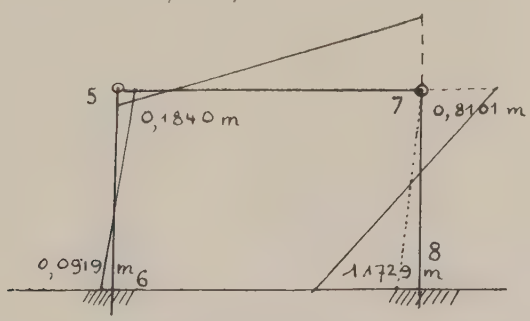


Fig. 153.

$$p_7 = 0,6907 \times 1,1729 = 0,8101\,m$$
$$p_5 = -0,1569 \times \ldots\ldots = -0,1840\,m$$
$$p_6 = 0,0789 \times \ldots\ldots = -0,0919\,m. \qquad \text{(fig. 153)}$$

Additionnons ces moments à ceux déjà obtenus en fonction de m pour le premier déplacement :

$$\begin{aligned}
M_6 &= -m - 0{,}0919\,m &&= -1{,}0919\,m\\
M_5 &= 0{,}7323\,m + 0{,}1840\,m &&= 0{,}9163\,m\\
M_7 &= -0{,}1840\,m - 0{,}8101\,m &&= 0{,}9941\,m\\
M_8 &= 0{,}0920\,m + 1{,}1729\,m &&= 1{,}2649\,m. \quad \text{(fig. 153)}
\end{aligned}$$

Appliquons les propriétés des forces équivalentes :

$$\frac{(1{,}0919 + 0{,}9163 + 0{,}9941 + 1{,}2649)\,m}{4{,}5} = F,$$

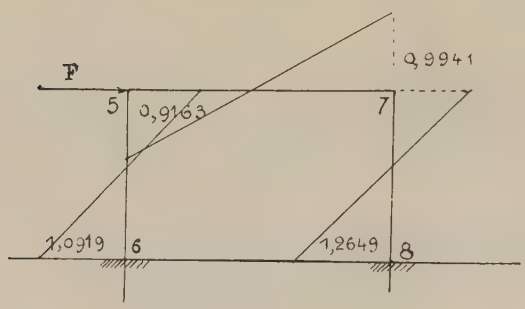


Fig. 153 *bis*.

c'est-à-dire :

$$\frac{4{,}2672\,m}{4{,}5} = F,$$

d'où :

$$m = \frac{4{,}5\,F}{4{,}2672} = 1{,}0545\,F,$$

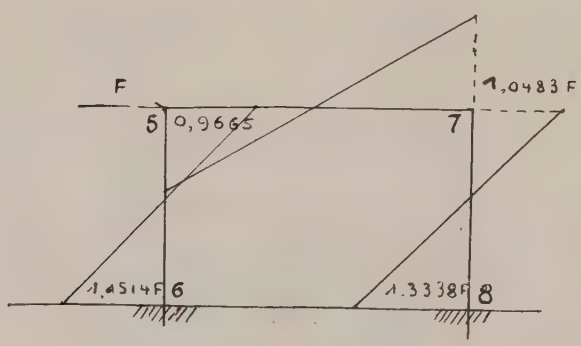


Fig. 154.

et :

$$M_6 = 1{,}1514\,F$$
$$M_5 = 0{,}9665$$
$$M_7 = 1{,}0483$$
$$M_8 = 1{,}3338. \qquad \text{(fig. 154)}$$

Les déplacements du point 5 seront donnés par les formules 9 et 10 du § 76 (fig. 155) :

$$\Omega_5 = -\frac{(1{,}1514 - 0{,}9965)\,4{,}5\,F}{2 \times 4{,}2\,EI} = -\frac{0{,}09905}{EI}\,F.$$

$$\Delta x_5 = \frac{(2 \times 1{,}1514 - 0{,}9665)\,4{,}25^2\,F}{6 \times 4{,}2\,.\,EI} = \frac{1{,}0738}{EI}\,F.$$

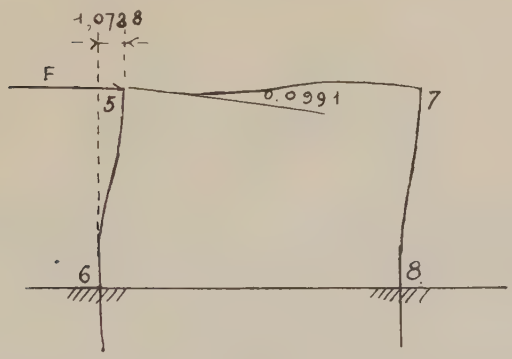


Fig. 155.

2° Moments incidents appliqués en 5 (fig. 156).

Les coefficients de répartition à l'appui 5 sont pour 5-6,

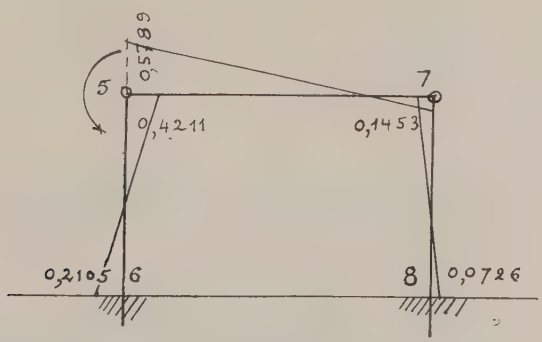


Fig. 156.

dans la construction pourvue d'appuis auxiliaires en 5 et 7 :

$$\frac{(2 - 0,5)\,4,5}{6 \times 4,2\,.\,EI},$$

et pour 5-7 :

$$\frac{(2 - 0,25)\,6,75}{6 \times 10,1\,.\,EI},$$

qui permettent d'écrire :

$$\frac{1,5 \times 4,5}{4,1}\,y = \frac{1,749 \times 6,75}{10,1}\,x,$$

d'où :

$$y = 0,7273\,x,$$

et :

$$x = \frac{\mu}{1,7273} = 0,5789\,\mu.$$

$$y = \mu - 0,5789\,\mu = 0,4211\,\mu$$
$$m_6 = 0,5 \times 0,4211\,\mu = 0,2105\,\mu$$
$$m_7 = 0,5789 \times 0,2510\,\mu = 0,1453\,\mu$$
$$m_8 = 0,500 \times 0,1453\,\mu = 0,0726\,\mu.$$

La somme des composantes des réactions horizontales des broches 5 et 7 est :

$$\frac{(0,4211 + 0,2105 - 0,1453 - 0,0726)}{4,5}\,\mu = 0,0919\,\mu.$$

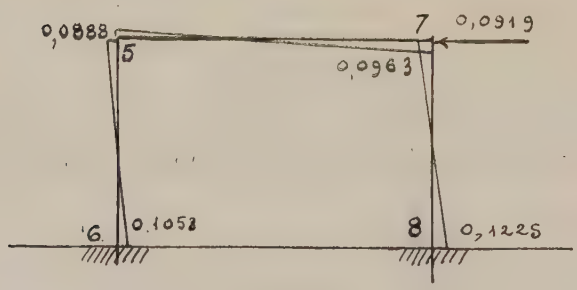


Fig. 157.

Les moments provoqués par celle-ci, changée de sens, qui agissent sur la construction à l'état naturel sont :

$$0,09109 \times 1,1514 = -0,1058\mu$$
$$0,9666 = +0,0888$$
$$1,0481 = -0,0963$$
$$1,3338 = +0,1225. \qquad \text{(fig. 157)}$$

Ajoutons-les aux moments précédemment trouvés :

$$M_6 = +(0{,}2105 + 0{,}1058)\mu = 0{,}1047\mu$$
$$M_{5-6} = -(0{,}4211 - 0{,}0838)\mu = -0{,}3323\mu$$
$$M_{5-7} = (0{,}5789 + 0{,}0888)\mu = 0{,}6677\mu$$
$$M_7 = -(0{,}0963 + 0{,}1453)\mu = -0{,}2416\mu$$
$$M_8 = (0{,}0726 + 0{,}1225)\mu = 0{,}1951\mu. \quad \text{(fig. 158)}$$

Calcul de :

$$\Omega_5 = -\frac{(0{,}1047 - 0{,}3323)}{2 \times 4{,}2 \,.\, EI} \times 4{,}5\mu = \frac{0{,}1219}{EI}\mu.$$

$$\Delta x_5 = \frac{(2 \times 0{,}1047 - 0{,}3323)}{6 \times 4{,}2 \,.\, EI} \times 4{,}5^2\mu = -\frac{0{,}0987}{EI}\mu.$$

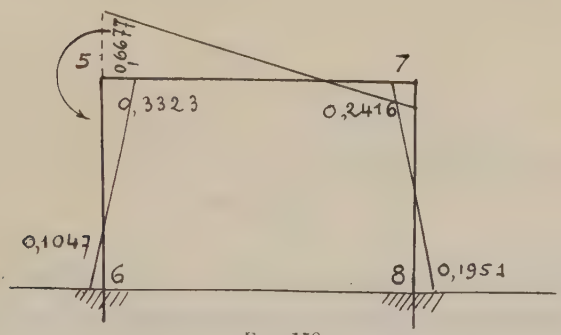


Fig. 158.

CHARGES VERTICALES AGISSANT SUR LA TRAVERSE HORIZONTALE

Nous emploierons des appuis à encastrements auxiliaires ; nous avons déjà effectué pour les calculs ci-dessus

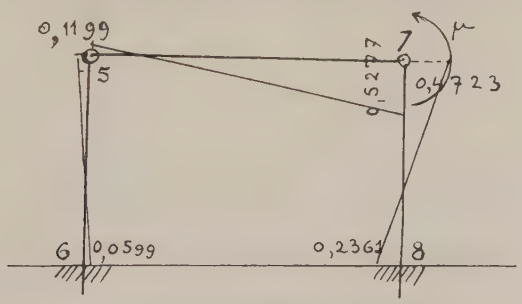


Fig. 159.

l'étude d'un moment incident en 5, procédons de même pour un moment incident en 7 (fig. 159).

Les coefficients de répartition en 7 sont pour 7-5 :

$$\frac{(2-0,2272)\,6,75}{6 \times 10,1\,.\,EI},$$

et pour 7-8 :

$$\frac{(2-05)\,4,5}{6 \times 5,1\,EI},$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{1,7728 \times 6,75}{10,1}\,y = \frac{1,5 \times 4,5}{5,1}\,x,$$

d'où :

$$y = 1,1171\,x,$$

et :

$$x = \frac{\mu}{2,1171} = 0,4723\mu,$$

$$y = \mu - 0,4723\mu = 0,5277\,\mu,$$

qui donne en 8 un moment :

$$0,4723 \times 0,500 = 0,2361\,\mu,$$

ainsi que :

$0.5277 \times 0,2272 = 0,1199$ en 5, et $0,1199 \times 0,500 = 0,0599$ en 6.

La somme des composantes horizontales des réactions des broches en 5 et 7 est :

$$\frac{(0,4723 + 0,2361 - 0,1199 - 0,0599)}{4,5}\,\mu = 0,1174\mu.$$

provoquant comme moments additionnels (fig. 160) :

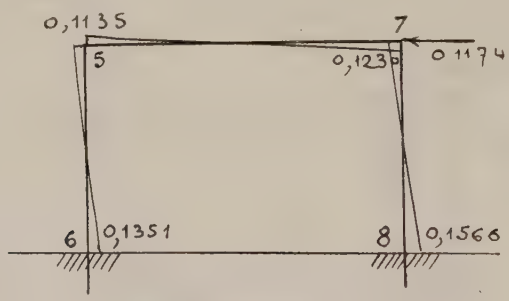


Fig. 160.

$$\begin{aligned} 0,1174\mu \times 1,1514 &= 0,1351\,\mu \\ \times\ 0,09565 &= 0,1135 \\ \times\ 1,0483 &= 0,1230 \\ \times\ 1,3338 &= 0,1566, \end{aligned}$$

ajoutons-les aux précédents :

$$m_6 = (0,0599 + 0,1351)\mu = 0,1950\mu$$
$$m_5 = (0,1199 + 0,1135)\mu = 0,2334\mu$$
$$m_{7-2} = (0,5277 + 0,1230)\mu = 0,6507\mu$$
$$m_{7-8} = (0,4723 + 0,1230)\mu = 0,3493\mu$$
$$m_8 = (0,2361 + 0,1566)\mu = 0,0795\mu. \qquad \text{(fig. 161)}$$

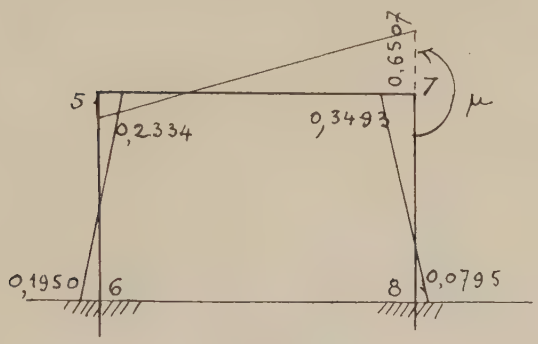


Fig. 161.

Puisque les charges sont symétriques on a les mêmes moments d'encastrements, et on peut donc ajouter sur le cadre à son état naturel, les deux effets des moments in-

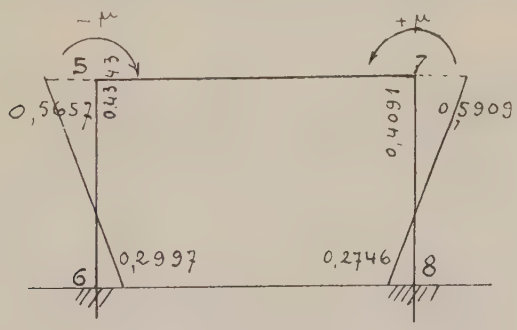


Fig. 162.

cidents de signes contraires aux encastrements, on obtient ainsi (fig. 162) :

$$m'_6 = (0,1047 + 0,1950)\mu = 0,2997$$
$$m'_5 = (0,3323 + 0,2334)\mu = 0,5657$$
$$m'_7 = (0,2416 + 0,3493)\mu = 0,5909$$
$$m' = (0,1951 + 0,0795)\mu = 0,2746.$$

3° Charge de p par mètre courant uniformément répartie sur 5-7 (fig. 163).

Moments d'encastrements :

$$\frac{6,75^2}{12}p = 3,780\,p, \qquad \text{(fig. 164)}$$

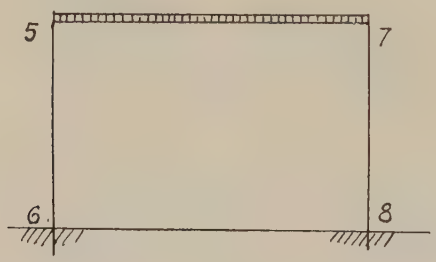


Fig. 163.

Fig. 164

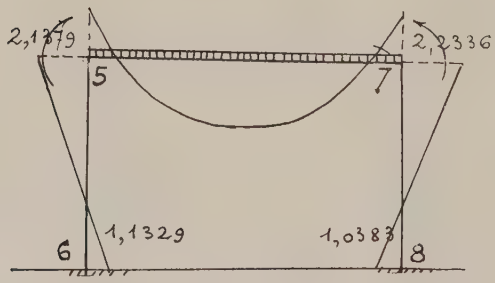


Fig. 165.

d'où les moments :

$$\begin{aligned}
M_6 &= 0,2997 \times 3,780\,p = 1,1329\,p \\
M_5 &= 0,5657 \times \qquad\quad = 2,1379 \\
M_7 &= 0,5909 \times \qquad\quad = 2,2336 \\
M_8 &= 0,2746 \times \qquad\quad = 1,0383. \qquad \text{(fig. 165)}
\end{aligned}$$

Calculs des déplacements en 5 :

$$\Omega_5 = \frac{(1,1329 - 2,1379)}{2 \times 4,2 \,.\, EI} 4,5\, p = \frac{0,5388}{EI}\, p.$$

$$\Delta x_5 = \frac{(2 \times 1,1329 - 2,1379)}{6 \times 4,2\, EI} 4,5^2 p = -\frac{0,1023}{EI}\, q.$$

4° Forces verticales isolées agissant sur la traverse 5-7 (fig. 166).

Les moments d'encastrement en 5 et 7 donnés par la

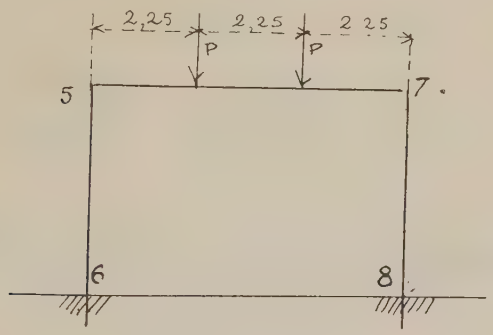


Fig. 166.

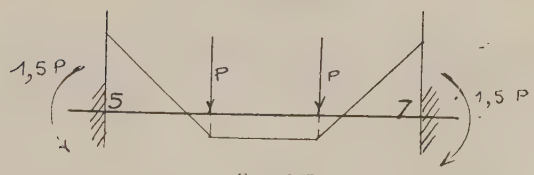


Fig. 167.

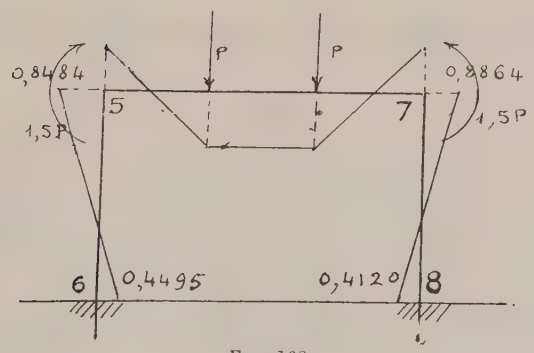


Fig. 168.

formule, pour les deux charges verticales P symétriquement disposées :

$$\frac{Pab^2 + Pa^2}{L^2} = \frac{Pab}{L} = \frac{2,25 \times 4,5}{6,75} P = 1,50 P. \quad \text{(fig. 167)}$$

Les moments seront donc (fig. 168) :

$$M_6 = 0,2997 \times 1,5 P = 0,4495 P$$
$$M_5 = 0,5657 \quad = 0,8484$$
$$M_7 = 0,5909 \quad = 0,8864$$
$$M_8 = 0,2246 \quad = 0,4120.$$

Calcul des déplacements en 2.

$$\Omega_5 = \frac{(0,4495 - 0,8485)}{2\ 4,2\ EI} 4,5 P = \frac{0,2132}{EI} P.$$

$$\Delta x_5 = \frac{(2 \times 0,4495 - 0,4484)}{6 \times 4,2\ EI} 4,5^2 P = \frac{0,0362}{EI} P.$$

CONSTRUCTION A UN ÉTAGE. RÉSOLUTION

MÉTHODE DIRECTE

(*Ensemble* a_1 *et* a_2).

Étudions le premier étage avec les charges indiquées à la figure 169, calculons-le par la méthode directe.

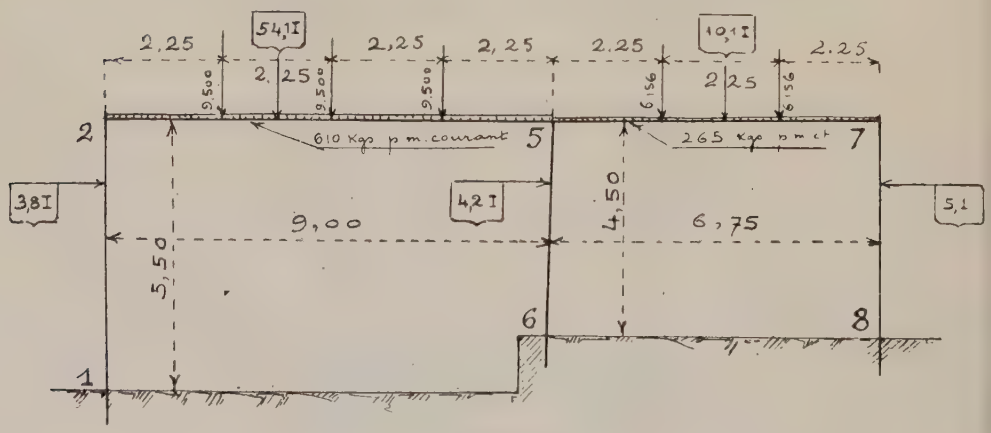


Fig. 169.

Donnons-nous comme inconnues les actions de la portion 1 . 2 . 5, sur la partie 6 . 5 . 7 . 8 (fig. 171) supposée sectionnée en 5 (fig. 170).

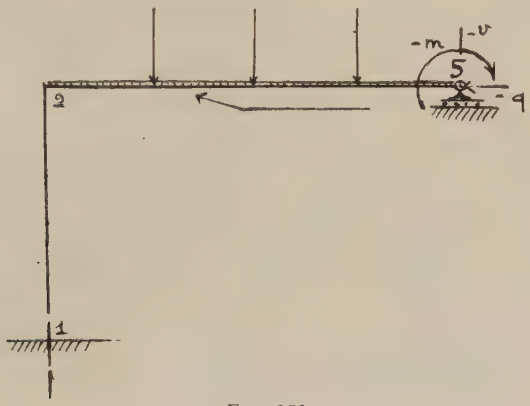


Fig. 170.

Ces actions sont m, q et v ; v étant équilibré par l'appui 6 n'a aucune action sur le développement des moments de flexion, nous n'avons donc qu'à chercher m et q.

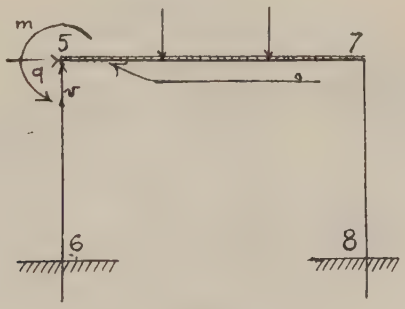


Fig. 171.

Pour les trouver, écrivons que les déplacements linéaires et angulaires en 5, pour la première partie 1 . 2 . 5 sont identiques à ceux du même point 5 dans la deuxième partie 6 . 5 . 7 et 8.

Reportons-nous aux calculs précédemment faits précisément avec les éléments de même nature, mais obtenus à l'aide de la méthode des appuis auxiliaires, laquelle

donne avec les mêmes nombres des décimales des valeurs plus approchées de celles cherchées par la méthode directe :

a) *Pour la force* — q *appliquée en 5* (fig. 172) nous avons :

$$\lambda_q = -\frac{4,0520}{EI} q.$$

$$\Omega_5 = -\frac{0,0733}{EI} q.$$

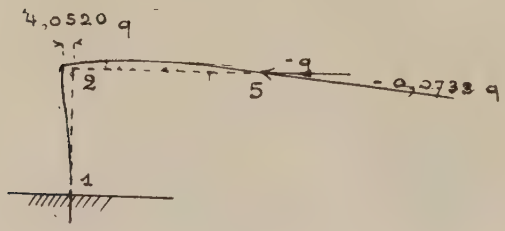


Fig. 172.

b) *Pour le moment* — m *appliqué en 5* (fig. 173) :

$$\lambda_m = -\frac{0,07345}{EI} m.$$

$$\Omega_5 = -\frac{0,05494}{EI} m.$$

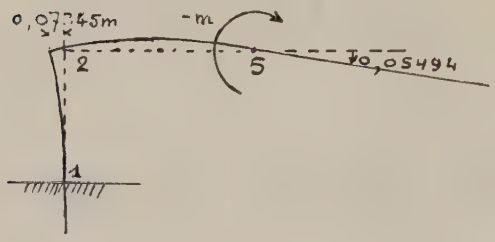


Fig. 173.

c) *Pour la charge uniformément répartie de 610 kg. par mètre courant* (fig. 174) :

$$\lambda_{5p} = \frac{1,5014 \times 610}{EI} = \frac{916}{EI}.$$

$$\Omega_{5p} = \frac{0,5514 \times 610}{EI} = \frac{336}{EI}.$$

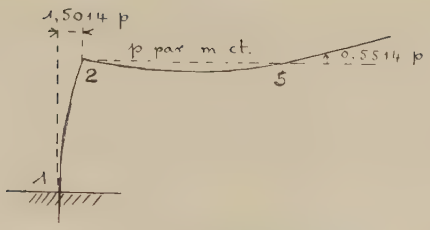


Fig. 174.

d) *Pour les trois charges isolées de 9.500 kg.* (fig. 175) :

$$\lambda_{5P} = \frac{0,6189 \times 9.500}{EI} = \frac{5.879}{EI}.$$

$$\Omega_{5P} = \frac{0,2295 \times 9.500}{EI} = \frac{2.180}{EI}.$$

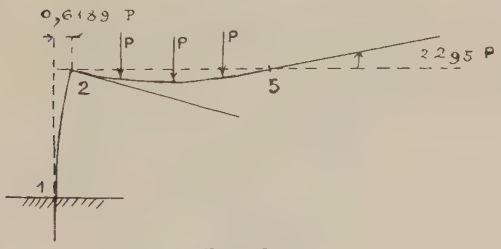


Fig. 175.

Pour l'ensemble :

$$\lambda_5 = \frac{-4,0520\,q - 0,07345\,m + 916 + 5879}{EI}.$$

$$\Omega_5 = \frac{-0,07339\,q - 0,05494\,m + 336 + 2180}{EI}.$$

Pour 6 . 3 . 5 . 8 :

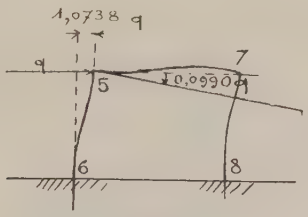


Fig. 176.

a) *Pour la force* q *appliquée en 5* (fig. 176) :

$$\lambda'_q = \frac{1,0738}{EI}\,q.$$

$$\Omega_q = \frac{0,09905}{EI}\,q.$$

b) *Pour le moment* m *appliqué en 5* (fig. 177) :

$$\lambda_m = -\frac{0{,}0987}{EI}\,m.$$

$$\Omega_m = \frac{0{,}1219}{EI}\,m.$$

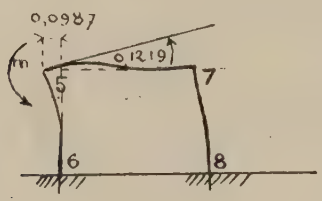


Fig. 177.

c) *Pour la charge uniformément répartie de 265 kg. par mètre courant* (fig. 178) :

$$\lambda_p = -\frac{0{,}1027 \times 265}{EI} = -\frac{27}{EI}.$$

$$\Omega_p = -\frac{0{,}5384 \times 265}{EI} = -\frac{143}{EI}.$$

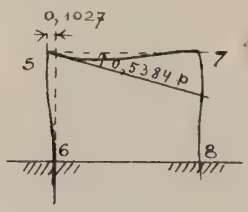


Fig. 178.

d) *Pour les charges isolées de 6.156 kg.* (fig. 179) :

$$\lambda_P = -\frac{0{,}0362 \times 6.156}{EI} = -\frac{223}{EI}.$$

$$\Omega_P = -\frac{0{,}2132 \times 6.156}{EI} = -\frac{1.312}{EI},$$

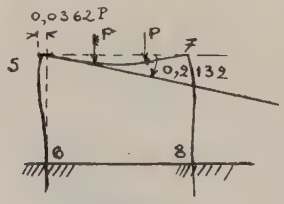


Fig. 179.

et pour cet ensemble :

$$\lambda = -\frac{4{,}0738\,q - 0{,}0987\,m - 27 - 223}{EI}.$$

$$\Omega = -\frac{0{,}09905\,q + 0{,}1219\,m - 143 - 1.342}{EI},$$

d'où les deux équations :

$$-4{,}0520\,q - 0{,}07345\,m + 6.795 = 1{,}0738\,q - 0{,}0987\,m - 250,$$
$$-0{,}0733\,q - 0{,}05499\,m + 2.516 = -0{,}09905\,q + 0{,}1219\,m - 1.455,$$

se ramenant à :

$$5{,}1259\,q - 0{,}0252\,m = 7.045,$$
$$0{,}0257\,q - 0{,}1768\,m = 3.971,$$

qui ont les racines $q = 1.485$, $m = 22.675$ qui permettent d'avoir pour la première partie (fig. 180) :

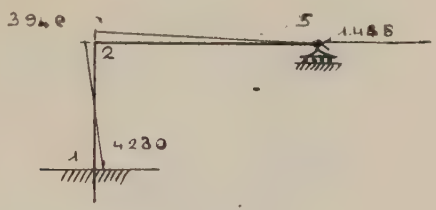


Fig. 180.

a) Pour q :

$$M_1 q = 2{,}8514 \times 1{,}485 = -4{,}230,$$
$$M_2 q = 2{,}6487 \times 1.485 = 3.949.$$

b) pour $-m$ (fig. 181) :

$$M_{1m} = 22.675 \times 0.01845 = 420$$
$$M_{2m} = 22.675.$$

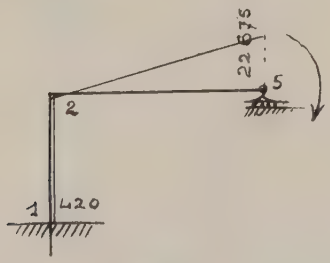


Fig. 181.

c) pour $p = 610$ (fig. 182) :

$$M_{1p} = M_{2p} = 0{,}3739 \times 610 = 228.$$

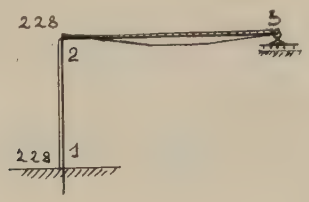


Fig. 182.

d) pour les trois forces $P = 9.500$ (fig. 183) :

$$M_{1P} = M_{2P} = 0{,}1555 \times 9.500 = 1.477,$$

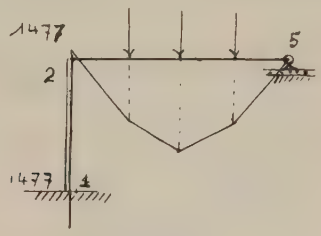


Fig. 183.

donnant finalement pour la partie 1, 2, 5 (fig. 184) :

$$M_1 = -4.230 - 420 + 228 + 1.477 = 2.945$$
$$M_2 = +3.940 - 420 + 228 + 1.477 = 5.225$$
$$M_5 = 22.675.$$

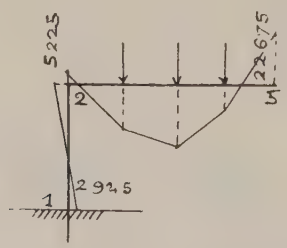


Fig. 184.

Et pour la deuxième partie 6, 5, 7, 8, d'une part, les

moments existant sous les actions des charges $p = 265$ et $P = 6.156$ qui seront :

$$M_{6p} = -1,1329 \times 265 = -300$$
$$M_{5p} = +2,1379 \times 265 = +565$$
$$M_{7p} = +2,3336 \times 265 = +592 \qquad \text{(fig. 185)}$$
$$M_{8p} = -1,0383 \times 265 = -275.$$

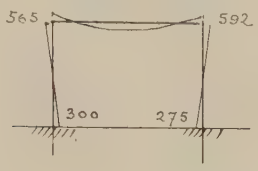


Fig. 185.

$$M_{6P} = -0,4496 \times 6.156 = -2.768$$
$$M_{5P} = 0.8484 \quad \ldots \quad = +5.223$$
$$M_{7P} = 0,8864 \quad \ldots \quad = +5.457 \qquad \text{(fig. 186)}$$
$$M_{8P} = -0,4120 \quad \ldots \quad = -2.536.$$

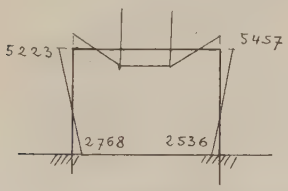


Fig. 186

Enfin pour $q = 1.485$:

$$M_{6q} = 1,1514 \times 1.485 = 1.709$$
$$M_{5q} = -0,9665 \quad \ldots \quad = -1.435$$
$$M_{7q} = 1,0483 \quad \ldots \quad = 1.557 \qquad \text{(fig. 187)}$$
$$M_{8q} = -1,3338 \quad \ldots \quad = -1.981.$$

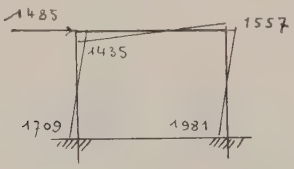


Fig. 187.

et pour $m = 22.675$:

$$\begin{aligned} M_{6m} &= 0{,}1047 \times 22.675 = 2.374 \\ M_{5m} &= -0{,}3323 \quad .... \quad = -7.535 \\ M_{7m} &= -0{,}2416 \quad .... \quad = -5.478 \\ M_{8m} &= 0{,}1951 \quad .... \quad = 4.424 \end{aligned} \qquad \text{(fig. 188)}$$

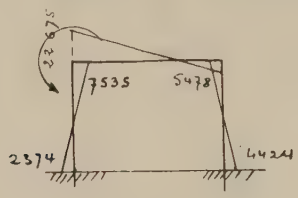


Fig. 188.

qui nous donnent finalement :

$$\begin{aligned} M_6 &= 1.709 + 2.374 - 300 - 2.768 = 1.015 \\ M_{5-6} &= -1.435 - 7.535 + 565 + 5.223 = -3.132 \\ M_{6-7} &= 22.675 - 3.132 = 19.543 \\ M_7 &= 1.557 - 5.478 + 592 + 5.457 = 2.128 \\ M_8 &= -1.981 + 4.424 - 275 - 2.536 = -368. \end{aligned} \qquad \text{(fig. 189)}$$

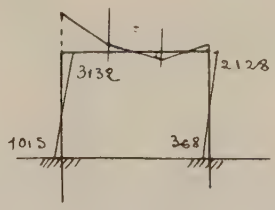


Fig. 189.

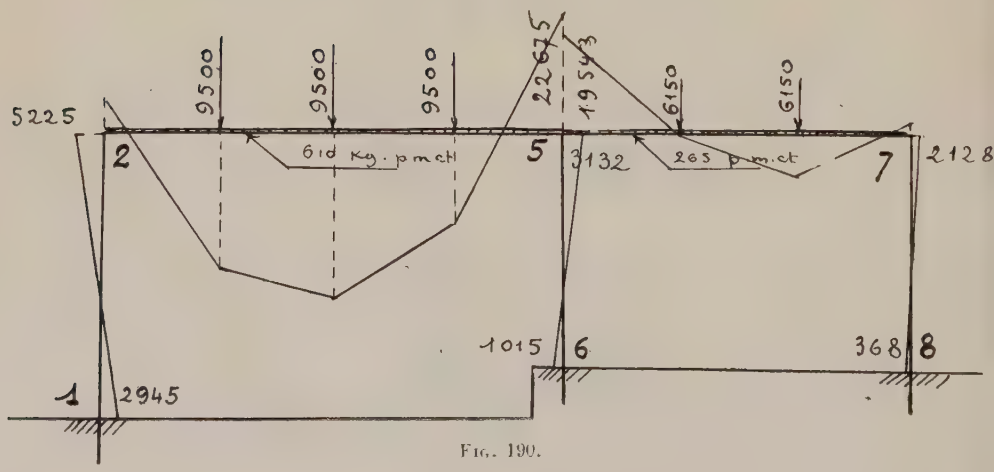


Fig. 190.

Le résultat de toutes ces opérations est consigné sur la figure 190 :

M_1	$= -$ 2.945	M_6	$= -$ 1.015
M_2	$=$ 5.225	M_{5-7}	$=$ 19.543
M_{5-2}	$=$ 22.675	M_7	$=$ 2.128
M_{5-6}	$=$ 3.132	M_8	$= -$ 368.

B. *MÉTHODE DES APPUIS AUXILIAIRES*

1° Calcul des coefficients de proportionnalité (fig. 191).

a) *Série de gauche.*

$\rho_{1-2} = 0{,}500$

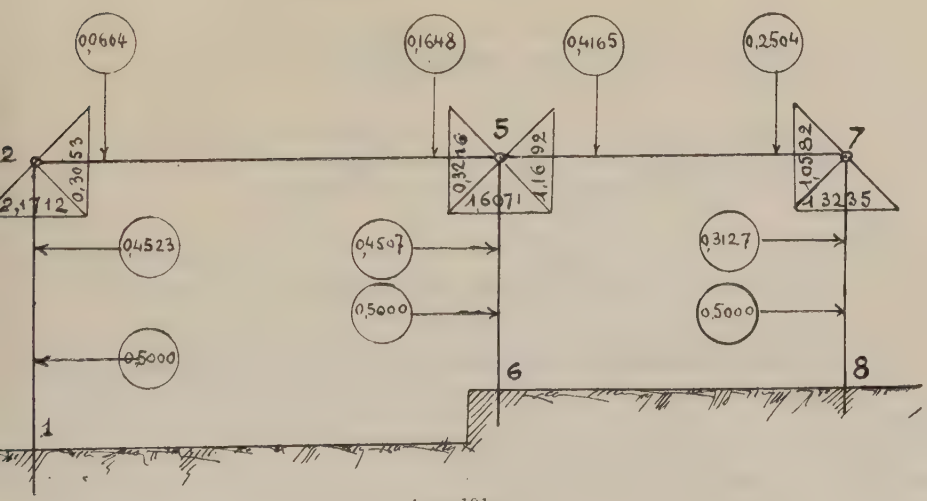


Fig. 191.

$$\rho_{2-5} = \frac{1}{2 + (2 - 0{,}5)\,\dfrac{5{,}5 \times 54{,}1}{9 \times 3{,}8}} = 0.0664$$

$$\rho_{6-5} = 0{,}500.$$

$$\rho_{5-7} = \frac{1}{2 + \dfrac{6{,}75}{10{,}1}\left[\dfrac{54{,}1}{9\,(2 - 0{,}0664)} + \dfrac{4{,}2}{4{,}50\,(2 - 0{,}500)}\right]} = 0{,}4165$$

$$\rho_{7-8} = \frac{1}{2 + (2 - 0{,}4165) \times \dfrac{6{,}75 \times 5{,}1}{4{,}5 \times 10{,}1}} = 0{,}3127.$$

b) *Série de droite.*

$$\rho_{8-7} = 0{,}500$$

$$\rho_{7-5} = \frac{1}{2 + (2 - 0{,}5) \times \dfrac{4{,}5 \times 10{,}1}{6{,}75 \times 5{,}1}} = 0{,}2504.$$

$$\rho_{6-2} = 0{,}500$$

$$\rho_{5-6} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{9}{54{,}1}\left[\dfrac{10{,}1}{6{,}75\,(2 - 0{,}2504)} + \dfrac{4{,}2}{4{,}5\,(2 - 0{,}500)}\right]}} = 0{,}1648$$

$$\rho_{2-1} = \frac{1}{2 + (2 - 0{,}1648)\,\dfrac{9 \times 3{,}8}{5{,}5 \times 54{,}1}} = 0{,}4523$$

$$\rho_{5-6} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{4{,}5}{4{,}2}\left[\dfrac{10{,}1}{6{,}75\,(2 - 0{,}2504)} + \dfrac{54{,}1}{9\,(2 - 0{,}0664)}\right]}} = 0{,}4507.$$

2° Calcul des coefficients de répartition (fig. 191).

Nous savons que ces coefficients sont donnés par la formule :

$$\frac{(2M_n - M_{n-1})\, l_n}{6 E_n I_n}.$$

E_n étant généralement constant dans toute construction considérée, 6 E_n est un diviseur commun aux expressions employées et disparaît dans les calculs, il suffira de prendre comme coefficient utilisable de répartition :

$$K_{n-1} = \frac{(2M_n - M_{n-1})\, l_n}{I_n}$$

(M_n et M_{n-1} en valeurs absolues).

Pour la construction envisagée les moments d'inertie I_n sont 3,8 I ; 54,1 I ; 4,2 I ; 10,1 I ; 5,1 I.

I étant une mesure commune qui disparaît aussi dans les calculs, on a donc (fig. 191) :

$$K_{2-1} = (2 - 0{,}500)\,5{,}5 \quad = 2{,}1712.$$

$$K_{2-5} = \frac{(2 - 0{,}1648)}{54{,}1}\,9 \quad = 0{,}3053$$

$$K_{5-2} = \frac{2 - 0{,}0564)}{54{,}1}\,9 \quad = 0{,}3216$$

$$K_{3-4} = \frac{(2 - 0{,}500)}{4{,}2}\,4{,}5 \quad = 1{,}6071$$

$$K_{5-7} = \frac{(2 - 0{,}2504)}{10{,}1}\,6{,}75 = 1{,}1692$$

$$K_{7-5} = \frac{(2 - 0{,}4165)}{10{,}1}\,6\ 75 = 1{,}0582$$

$$K_{7-8} = \frac{(2 - 0{,}500)}{5{,}1}\,4{,}50 = 1{,}3235$$

Moments provoqués par une force horizontale F appliquée en 2 (fig. 192).

Employons la méthode des déplacements successifs des

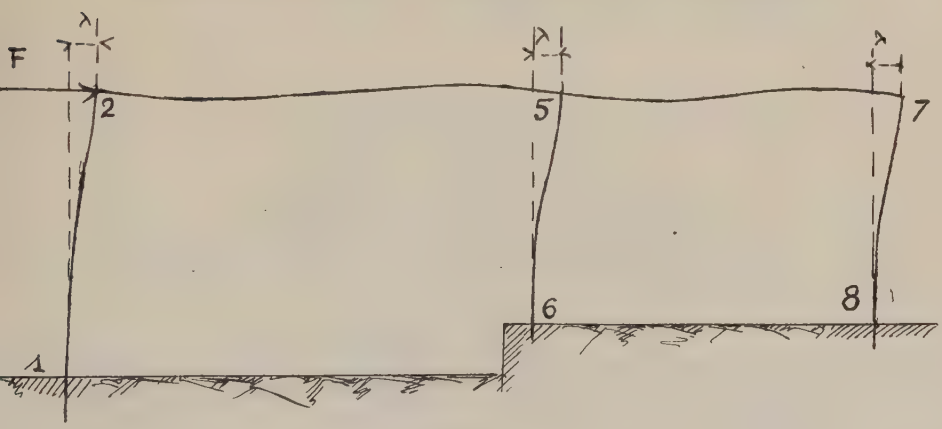


Fig. 192.

montants 1-2, 5-6, 7-8, dans la construction pourvue d'appuis auxiliaires à rotules en 2, 5 et 7.

Le déplacement de 1 en 1′ (fig. 193) provoque en 1 un moment m ; appliquons la formule 11 :

$$m_2 = \frac{0{,}4523\,(1 + 0{,}500)}{0{,}500\,(1 + 0{,}453)} = 0{,}9343\,m,$$

puis,

$$m_{3-2} = 0{,}9343 \times 0{,}1648\, m = 0{,}1540\, m$$

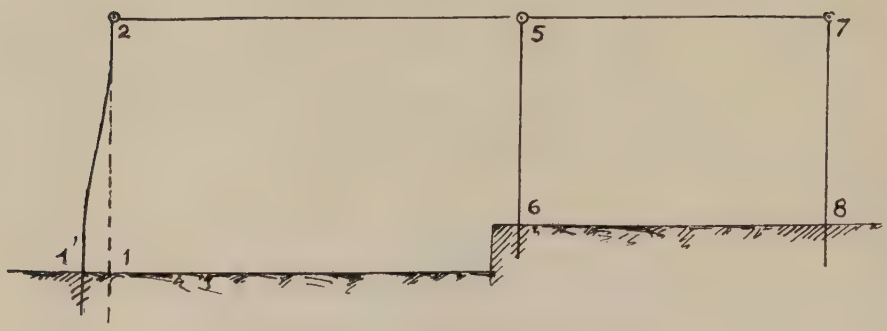


Fig. 193.

avec les coefficients de répartition nous écrivons :

$$1{,}1692\, x = 1{,}6071\, y$$
$$y = \frac{1{,}1692}{1{,}6071}\, x = 0{,}7276\, x$$

et

$$1{,}7276\, x = 0{,}1540\, m$$
$$x = \frac{0{,}1540}{1{,}7276}\, m = 0{,}0891\, m$$

$$y = 0{,}1540\, m - 0{,}0891\, m = -0{,}0649\, m$$
$$m_6 = 0{,}500 \times 0{,}0649\, m = 0{,}0325\, m$$
$$m_7 = 0{,}0391 \times 0{,}2504\, m = 0{,}0223\, m$$
$$m_8 = 0{,}500 \times 0{,}0223\, m = 0{,}0111\, m. \quad \text{(fig. 194)}$$

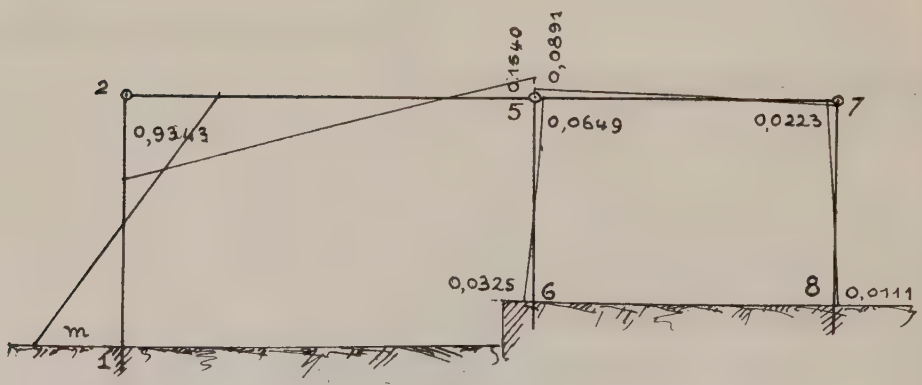


Fig. 194.

Pour le déplacement de 6 en 6′ (fig. 195) un moment p se développe en 6 et comme pour m, calculons les autres moments :

$$p_{5-2} = \frac{0.4507\,(1 + 0,500)\,p}{0,500\,(1 + 0,4507)} = 0,9320\,p$$

$$0,3216\,x = 1,1692\,y$$

$$y = \frac{0,3216}{1,1692}\,x = 0,2757\,x$$

$$1,2757\,x = 0,9320\,p$$

$$x = \frac{0,9320}{1,2757}\,p = 0,7306\,p$$

$$y = (0,9320 - 0,7306)\,p = 0,2014\,p$$

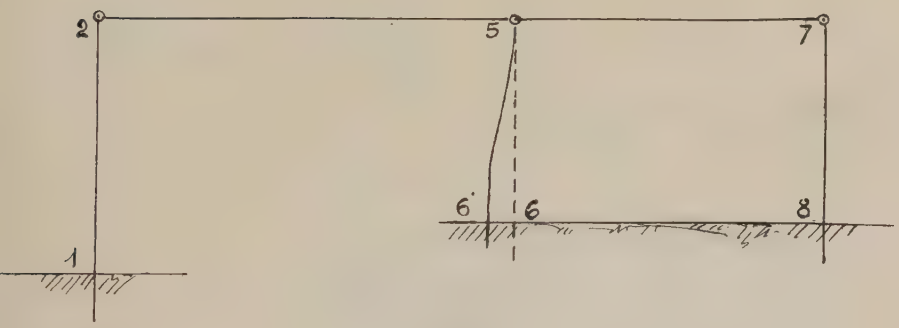


Fig. 195.

$$p_2 = 0,7306 \times 0,0664 = 0,0485\,p$$
$$p_1 = 0,0485 \times 0,500\,p = 0,0242\,p$$
$$p_5 = 0,2504 \times 0,2014\,p = 0,0504\,p$$
$$p_6 = 0,500 \times 0,0504\,p = 0,0252\,p \qquad \text{(fig. 196)}$$

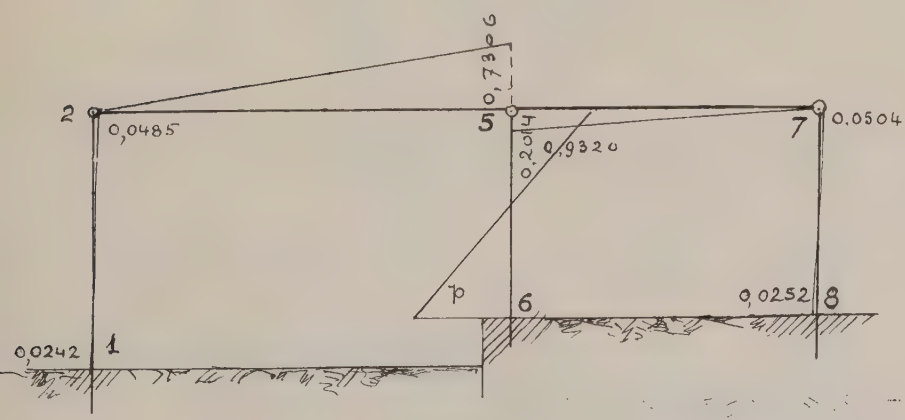


Fig. 196.

Pareillement pour le déplacement de 8 en 8′ pour lequel se manifeste un moment q en 6 (fig. 197) :

$$q_7 = \frac{0{,}3127\,(1 + 0{,}500)}{0{,}500\,(1 + 0{,}3127)} = 0{,}7146\,q$$
$$q_{5-7} = 0{,}4165 \times 0{,}7146 = 0{,}2976\,q.$$

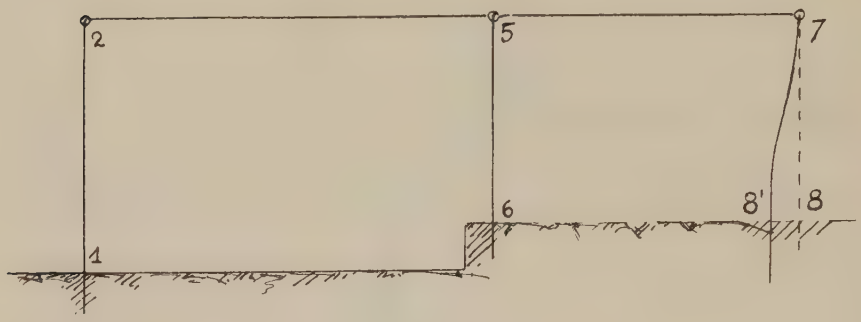


Fig. 197.

Répartition de 0,2976 autour de 5 :

$$0{,}3216\,x = 1{,}6071\,y$$
$$y = \frac{0{,}3216}{1{,}6071} = 0{,}2002\,x$$

d'où :

$$1{,}2002\,x = 0{,}2976\,q$$
$$x = \frac{0{,}2976}{1{,}2002}\,q = 0{,}2480\,q$$
$$y = (0{,}2976 - 0{,}2480)\,q = 0{,}0496\,q = q_{3-4}$$
$$q_4 = 0{,}500 \times 0{,}0496)\,q = 0{,}0248\,q$$
$$q_2 = 0{,}0664 \times 0{,}2480 \quad q = 0{,}0166\,q$$
$$q_1 = 0{,}500 \times 0{,}0166 \quad q = 0{,}0083\,q \qquad \text{(fig. 198)}$$

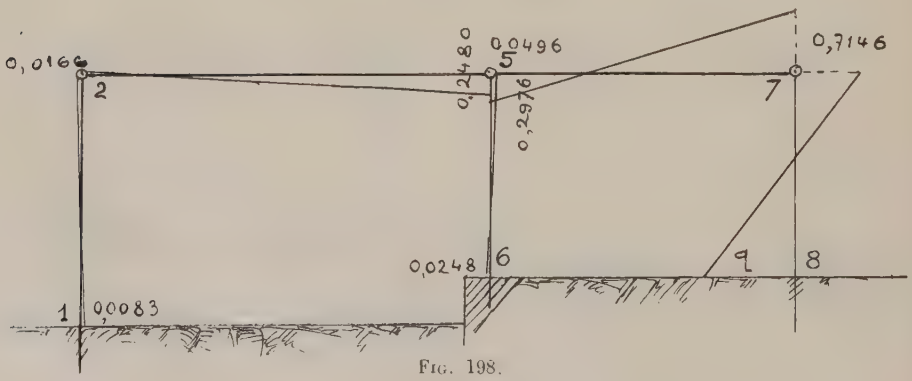


Fig. 198.

Comme les déplacements des appuis sont tous égaux, écrivons à l'aide des formules de Bresse :

$$\frac{(2-0{,}9343)}{6 \times 3{,}8 \,.\, EI} 5{,}5^2\, m = \frac{(2-0{,}9320)}{6 \times 4{,}2 \,.\, EI} 4{,}5^2\, p = \frac{(2-0{,}7146)}{6 \times 5{,}1 \,.\, EI} 4{,}5^2\, q,$$

d'où :

$$p = 1{,}6526\, m$$
$$q = 1{,}6673\, m$$

et par suite en fonction de m, les moments résultant des déplacements de 6 — 6′ et de 8 — 8′.

Pour p nous avons :

$$\begin{aligned}
0{,}0242 \times 1{,}6526 &= 0{,}0400\, m \\
0{,}0485 \times \ldots\ldots &= 0{,}0802 \\
0{,}7309 \times \ldots\ldots &= 1{,}2079 \\
0{,}9320 \times \ldots\ldots &= 1{,}5402 \\
0{,}2014 \times \ldots\ldots &= 0{,}3328 \\
0{,}0504 \times \ldots\ldots &= 0{,}0833 \\
0{,}0252 \times \ldots\ldots &= 0{,}0416
\end{aligned}$$

et pour q :

$$\begin{aligned}
0{,}0083 \times 1{,}6673 &= 0{,}0137\, m \\
0{,}0165 \times \ldots\ldots &= 0{,}0275 \\
0{,}2485 \times \ldots\ldots &= 0{,}4143 \\
0{,}0498 \times \ldots\ldots &= 0{,}0830 \\
0{,}0249 \times \ldots\ldots &= 0{,}0415 \\
0{,}2983 \times \ldots\ldots &= 0{,}4973 \\
0{,}7146 \times \ldots\ldots &= 1{,}1915
\end{aligned}$$

qui donnent pour l'ensemble des déplacements :

$$\begin{aligned}
M_1 &= 1{,}000 + 0{,}0400 - 0{,}0137 = 1{,}0263\, m \\
M_2 &= -0{,}9343 - 0{,}0802 + 0{,}0275 = -0{,}9870 \\
M_{5-2} &= 0{,}1540 + 1{,}2079 - 0{,}4143 = 0{,}9476 \\
M_{5-6} &= 0{,}0649 + 1{,}5402 + 0{,}0830 = 1{,}6881 \\
M_6 &= 0{,}0325 + 1{,}6525 + 0{,}0415 = 1{,}7266 \\
M_{5-7} &= 0{,}0891 - 0{,}3323 - 0{,}4973 = -0{,}7405 \\
M_7 &= 0{,}0833 + 1{,}1195 - 0{,}0223 = 1{,}2525 \\
M_8 &= -1{,}6673 - 0{,}0416 + 0{,}0111 = -1{,}0978
\end{aligned}$$

Écrivons que les composantes horizontales des réactions des broches en 2, 5 et 7 ont une somme égale à F, nous avons m en fonction de celle-ci :

$$\frac{(0{,}9870 + 1{,}0263)}{5{,}50}\, m = 0{,}3660\, m$$

$$\frac{(1{,}6881 + 1{,}7266)}{4{,}50}\, m + \frac{(1{,}2525 + 1{,}6978)}{4{,}50}\, m = 1{,}4144\, m.$$

donc :

$$(0,3660 + 1,4414)\, m = 1,7804\, m = F$$

d'où :

$$m = \frac{F}{1,7804} = 0,5616\ F.$$

Finalement les moments en fonction de F sont (fig. 199) :

$$\begin{aligned}
M_1 &= 1,0263 \times 0,5616\ F = 0,5764\ F \\
M_2 &= 0,9870 \times \ldots\ldots\ldots = 0,5543 \\
M_{5-2} &= 0,9476 \times \ldots\ldots\ldots = 0,5321 \\
M_{5-6} &= 1,6881 \times \ldots\ldots\ldots = 0,9480 \\
M_5 &= 1,7266 \times \ldots\ldots\ldots = 0,9697 \\
M_{5-7} &= 0,7405 \times \ldots\ldots\ldots = 0,4159 \\
M_7 &= 1,2525 \times \ldots\ldots\ldots = 0,7034 \\
M_8 &= 1,6978 \times \ldots\ldots\ldots = 0,9535.
\end{aligned}$$

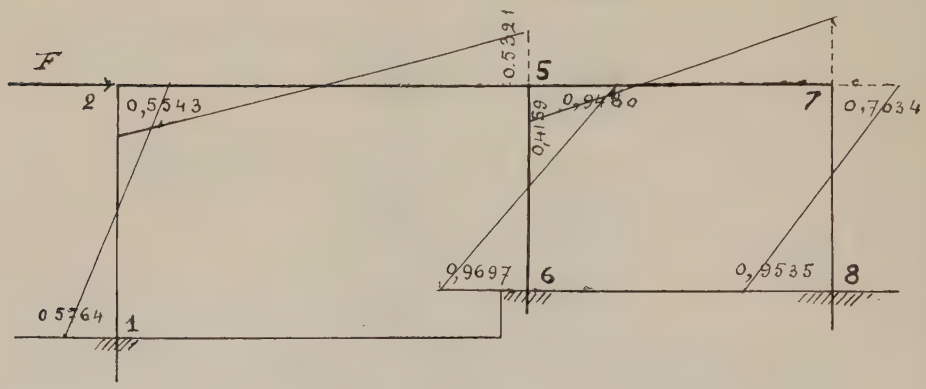


Fig. 199.

Moments incidents en 2, 5 et 7.

Moment incident en 2 (fig. 200).

Cherchons les moments provoqués par un moment incident appliqué sur l'œillet de l'appui auxiliaire 2, de la construction pourvue d'appuis auxiliaires en 2, 5 et 7.

Les coefficients de répartition calculés plus haut : 2,1723 et 0,1389 donnent celle-ci immédiatement, soit :

$$2,1723\, y = 0,3053\, x \qquad y = \frac{0,3053}{2,1723}\, x = 0,1406\, x$$

$$x = \frac{\mu}{1,1406} = 0,8767\, \mu$$

d'où :

$$y = (1,0000 - 0,8767)\,\mu = 0,1233\,\mu$$
$$m_4 = 0,500 \times 0,1233\,\mu = 0,0616\,\mu$$
$$m_{5-6} = 0,8767 \times 0,1648\,\mu = 0,1455\,\mu$$
$$1,1692\,x = 1,6071\,y \qquad y = \frac{1,1692}{1,6071}\,x = 0,7276\,x$$

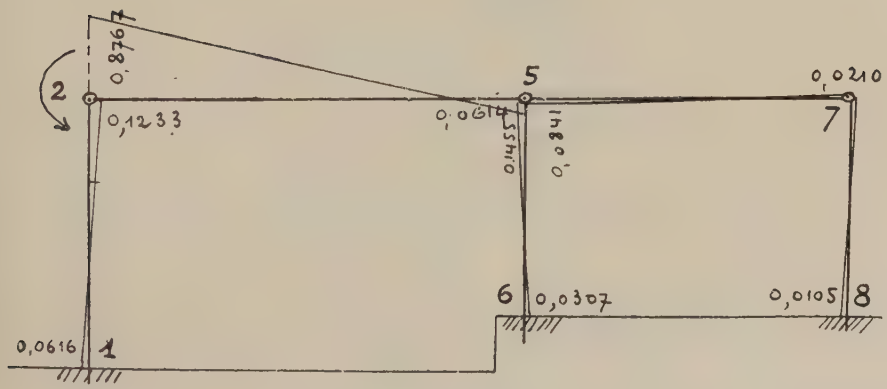


Fig. 200.

d'où :

$$x = \frac{0,1455\,\mu}{1,7276} = 0,0841\,\mu$$
$$y = (0,1455 - 0,0841)\,\mu = 0,0614\,\mu = m_{3-4}$$
$$m_6 = 0,500 \times 0,0614\,\mu = 0,0307\,\mu$$
$$m_7 = 0,0841 \times 0,2504\,\mu = 0,0210\,\mu$$
$$m_8 = 0,500 \times 0,0210\,\mu = 0,0105\,\mu.$$

Moment incident en 5 (fig. 201).

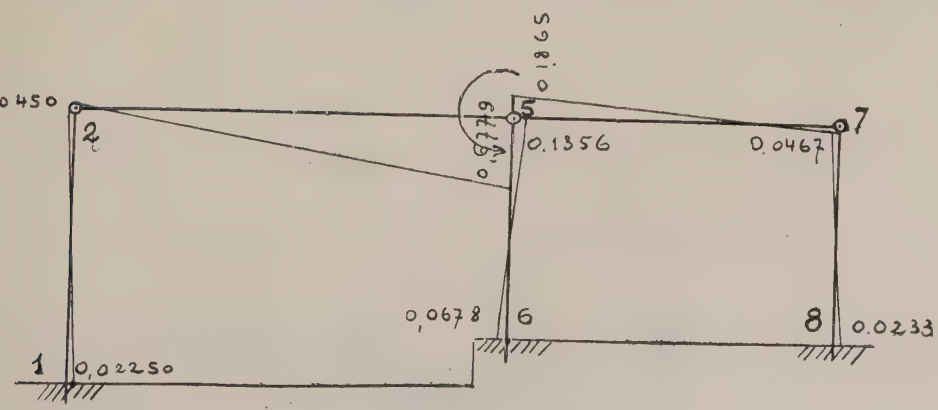


Fig. 201.

Même marche d'opérations que ci-dessus :

$$0{,}3216\,x = 1{,}6071\,y = 1{,}1692\,z$$

$$y = \frac{0{,}3216}{1{,}6071}\,x = 0{,}2001\,x$$

$$z = \frac{0{,}3216}{1{,}1692}\,x = 0{,}2751\,x$$

$$x + 0{,}2001\,x + 0{,}2751\,x = 1{,}4752\,x = \mu$$

$$x = \frac{\mu}{1{,}4752} = 0{,}6779\,\mu.$$

$$y = 0{,}2001 \times 0{,}6779\,\mu = 0{,}1356\,\mu$$
$$z = 0{,}2751 \times 0{,}6779\,\mu = 0{,}1865\,\mu$$
$$m_2 = 0{,}6779 \times 0{,}0664\,\mu = 0{,}0450\,\mu$$
$$m_1 = 0{,}500 \times 0{,}0450\,\mu = 0{,}0225\,\mu$$
$$m_6 = 0{,}500 \times 0{,}1356\,\mu = 0{,}0678\,\mu$$
$$m_7 = 0{,}1865 \times 0{,}2504\,\mu = 0{,}0467\,\mu$$
$$m_8 = 0{,}500 \times 0{,}0467\,\mu = 0{,}0233\,\mu.$$

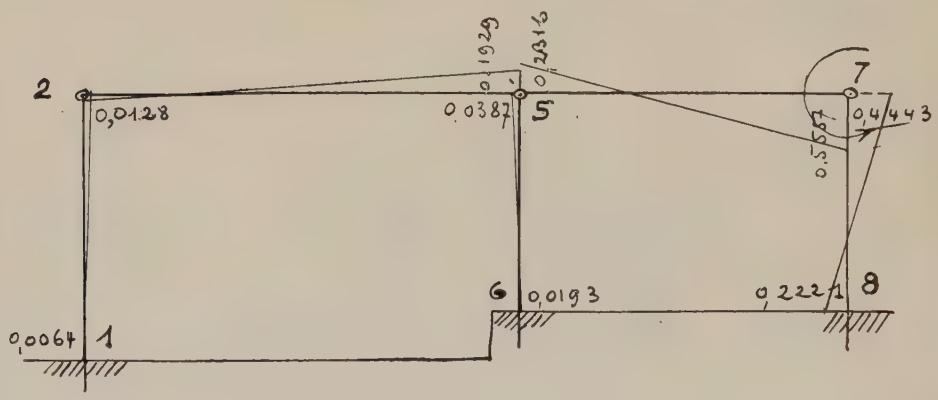


Fig. 202.

Moment incident en 7 (fig. 202).

Pareillement l'on a :

$$1{,}3225\,x = 1{,}0582\,y$$

$$y = \frac{1{,}3225\,x}{1{,}0582} = 1{,}2506 \qquad x = \frac{\mu}{2{,}2506} = 0{,}4443\,\mu.$$

$$y = \mu - 0{,}4443\,\mu = 0{,}5557\,\mu$$
$$m_{5\text{-}7} = 0{,}5557 \times 0{,}4165\,\mu = 0{,}2316\,\mu$$

et répartition de celui-ci :

$$0{,}3216\,x' = 1{,}6071\,y'$$
$$y' = \frac{0{,}3216}{1{,}6071} = 0{,}2002\,x$$
$$x = \frac{0{,}2316}{1{,}2002} = 0{,}1929\,\mu$$
$$y' = 0{,}2316\,\mu - 0{,}1929\,\mu = 0{,}0387\,\mu$$
$$m_6 = 0{,}500 \times 0{,}0387\,\mu = 0{,}0193\,\mu$$
$$m_2 = 0{,}1929 \times 0{,}0664\,\mu = 0{,}0128\,\mu$$
$$m_1 = 0{,}500 \times 0{,}0128\,\mu = 0{,}0064\,\mu.$$

Calculs des moments de flexion provoqués par des charges verticales qui agissent sur les traverses.

Employons la méthode des encastrements auxiliaires. Pour la travée 2-5 pour une charge p uniformément répartie par mètre courant, les moments d'encastrement obtenus à l'aide de la formule connue (fig. 203) :

$$m = \frac{pl^2}{12},$$

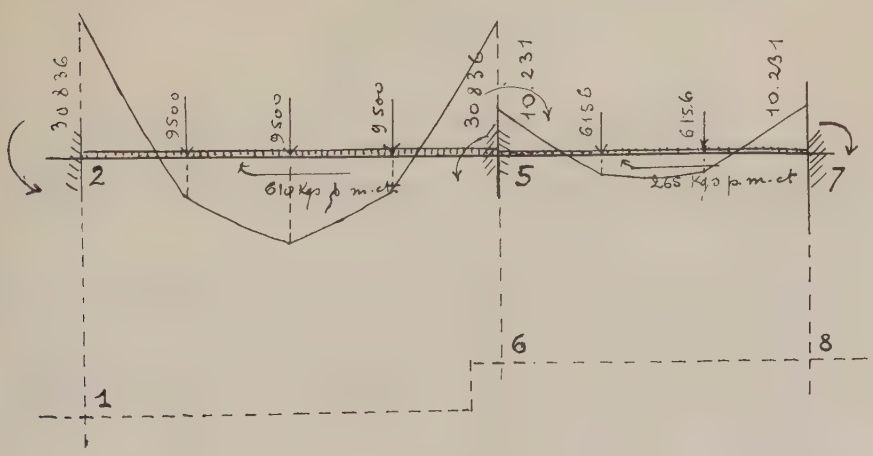


Fig. 203.

sont pour le cas présent :

$$m = \frac{p \times 9^2}{12} = 6{,}754\,p.$$

Pour la deuxième travée 5-7, les moments d'encastrement sont :

$$m' = \frac{p'l^2}{12} = \frac{p' \times 6{,}75^2}{12} = 3{,}797\, p'.$$

Pour les trois charges P équidistantes, nous avons déjà trouvé pour 2-5 l'expression M = 2,8125 P, et sur la traverse 5-7 pour les deux charges P', M' = 1,5 P'.

En donnant à :

$$p = 610 \text{ kg.}$$
$$p' = 265$$
$$P = 9.500$$
$$P' = 6.150.$$

Pour la travée 2-5 on a :

$$\begin{array}{rcrl} 2{,}8125 & \times & 9.500 = & 26.719 \\ 6.754 & \times & 610 = & 4.117 \\ \hline & & & 30.836 \end{array}$$

Pour la travée 5-7 :

$$\begin{array}{rcrl} 1.500 & \times & 6.150 = & 9.225 \\ 3.797 & \times & 265 = & 1.006 \\ \hline & & & 10.231 \end{array}$$

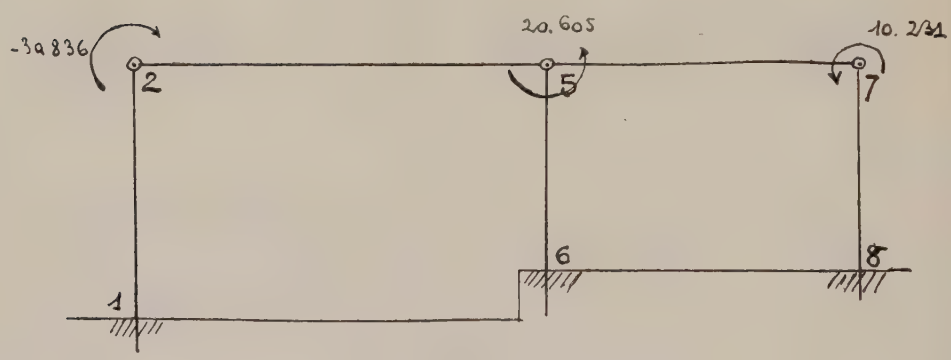


Fig. 204.

C'est-à-dire 30.836 à appliquer en 2; 30.836 — 10.231 = 20.605 à appliquer en 5, et 10.231 en 7 (fig. 204).

Moment 30.836 appliqué en 2 (fig. 205).

M_1	× 30.836 =	1.901
M_{2-1}	=	3.802
M_{2-5}	=	27.034
M_{5-2}	=	4.486
M_{5-6}	=	1.893
M_{6-7}	=	946
M_{5-7}	=	2.593
M_7	=	648
M_8	=	324

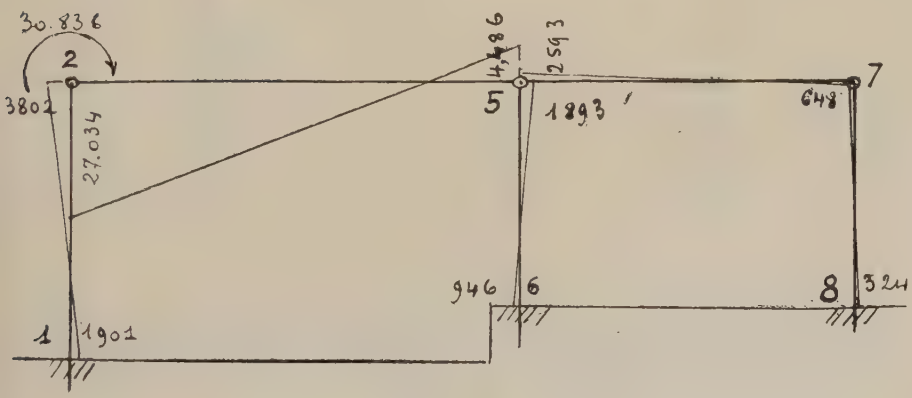


Fig. 205.

Moment 20.605 appliqué en 5 (fig. 206).

M_1	× 20.605 =	463

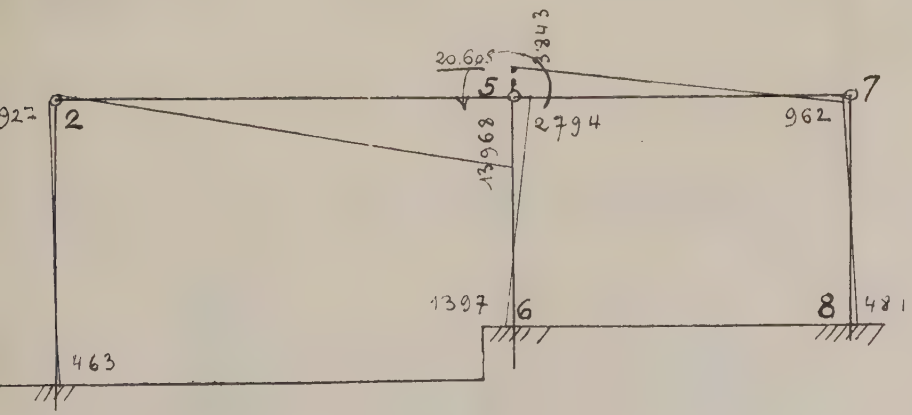


Fig. 206.

M_2	927
M_{5-2}	= 13.968
M_{5-6}	= 2.794
M_6	= 1.397
M_{5-7}	= 3.843
M_7	= 962
M_8	= 481

Moment 10.231 appliqué en 7 (fig. 207).

M_1 × 10.231	= 65
M_2	= 131
M_{5-2}	= 1.973
M_{5-6}	= 396
M_6	= 198
M_{5-7}	= 2.369
M_{7-5}	= 5.775
M_{7-8}	= 4.546
M_8	= 2.273

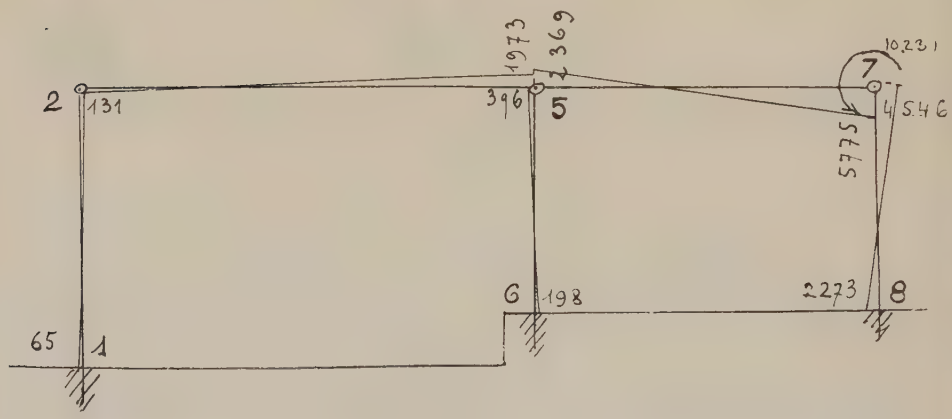


Fig. 207.

Additionnons ces résultats, correspondants aux trois moments incidents (fig. 208) :

M_1	= 2.299
M_2	= 4.598 = 26.238
M_{5-2}	= 7.509
M_{5-6}	= 4.291
M_6	= 2 145

M_{5-7} . . . . . = 8.805

M_7 . . . . . = 7.365
= 2.936

M_8 . . . . . = 1.468

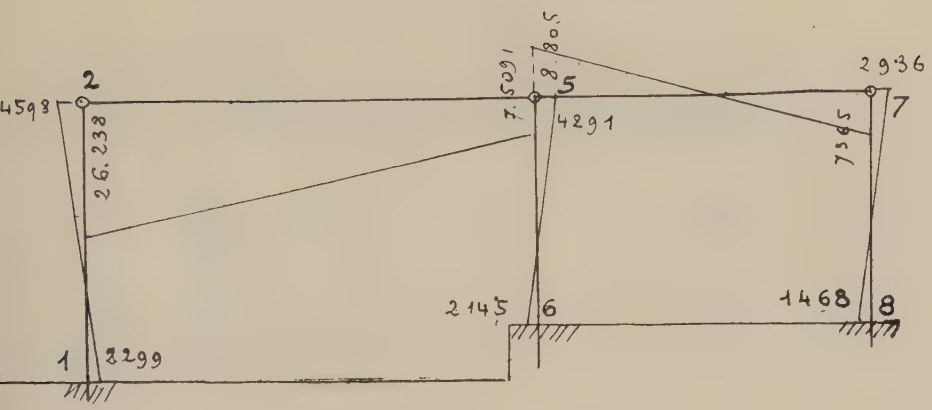


Fig. 208.

Ajoutés aux moments trouvés dans les traverses considérées comme encastrées, on a les moments consignés sur la figure 209 pour laquelle calculons les forces d'entraî-

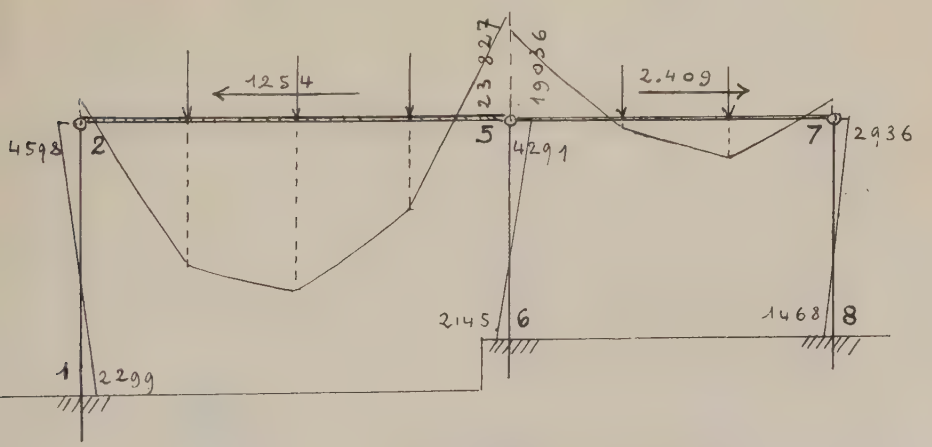


Fig. 209.

nement provenant des différences des réactions horizontales des axes des appuis auxiliaires $\frac{4.598 + 2.299}{5,50}$

= 1.254, pour le montant 1-2 ; pour les autres montants :

$$\frac{4.291 + 2.145 + 2.936 + 1.468}{4,5} = 2.409.$$

La force d'entraînement totale étant : 2.409 — 1.254 = 1.155, pour laquelle les moments additionnels correspondants sont (fig. 210) :

M_1	× 1.155 =	666
M_2	=	640
M_{5-2}	=	615
M_{5-6}	=	1.095
M_6	=	1.120
M_{5-7}	=	480
M_7	=	812
M_8	=	1.101

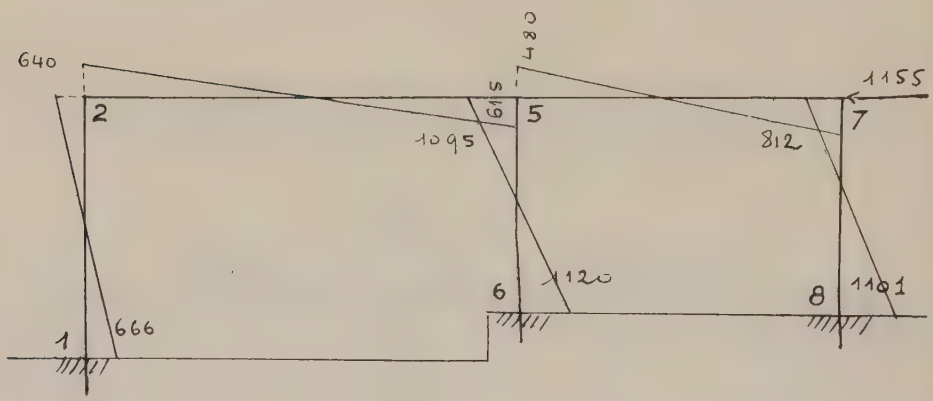


Fig. 210.

Et en additionnant avec le résultat ci-dessus (fig. 209), on a finalement (fig. 211) :

M_1	=	2.965
M_2	=	5.238
M_{5-2}	=	22.717
M_{5-6}	=	3.196
M_6	=	1.025
M_{5-7}	=	19.516
M_7	=	2.124
M_8	=	368

Résultats qui ne diffèrent que de l'ordre de 2/1.000 pour les grands moments, et de 1,8 p. 100 pour un des plus petits, avec les résultats obtenus par la méthode directe.

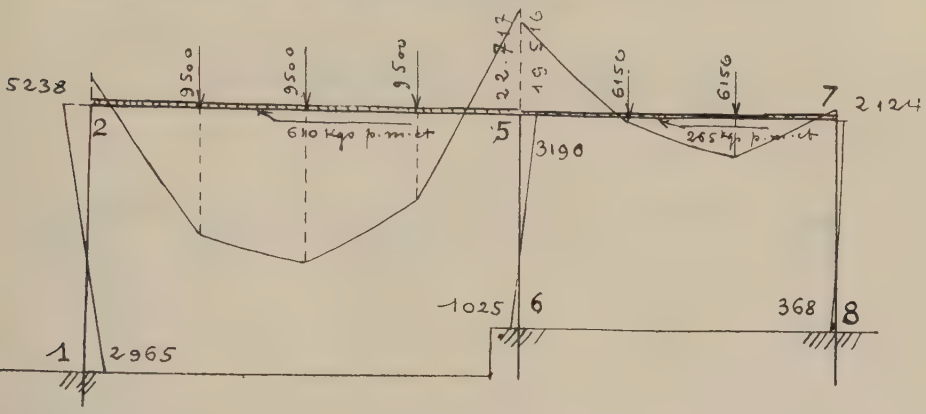


Fig. 211.

Moments incidents — x en 2 et — y en 5.

A'. *Méthode directe.* — Pour calculer, par la méthode directe, les moments de flexion dus aux moments incidents — x et — y en 2 et 5, nous avons à refaire les mêmes calculs que pour les charges verticales, qui conduisent à l'équation :

$$5,1329\,q - 0,0249\,m = 0,1466\,x - 0,0987\,y$$
$$0,0256\,q - 0,1763\,m = -0,0268\,x - 0,1219\,y$$

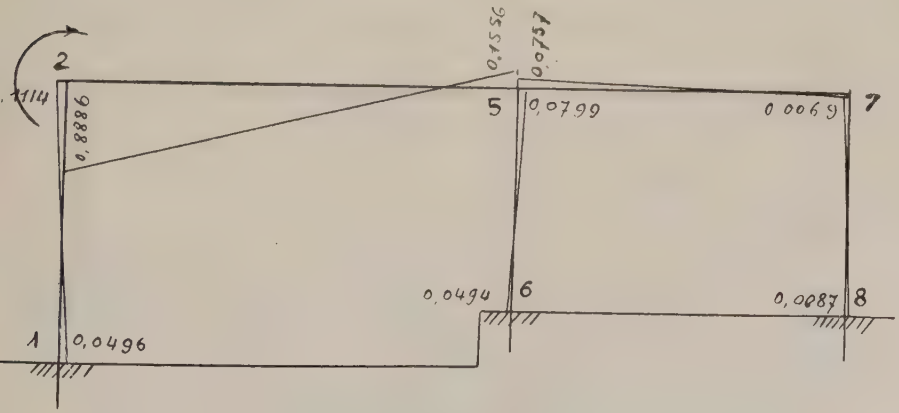


Fig. 212.

dont les racines sont :

$$q = 0{,}02928\,x - 0{,}02256\,y$$
$$m = 0{,}1556\,x - 0{,}6861\,y,$$

qui donne pour — x les résultats consignés dans la figure 212, et pour — y, ceux de la figure 213.

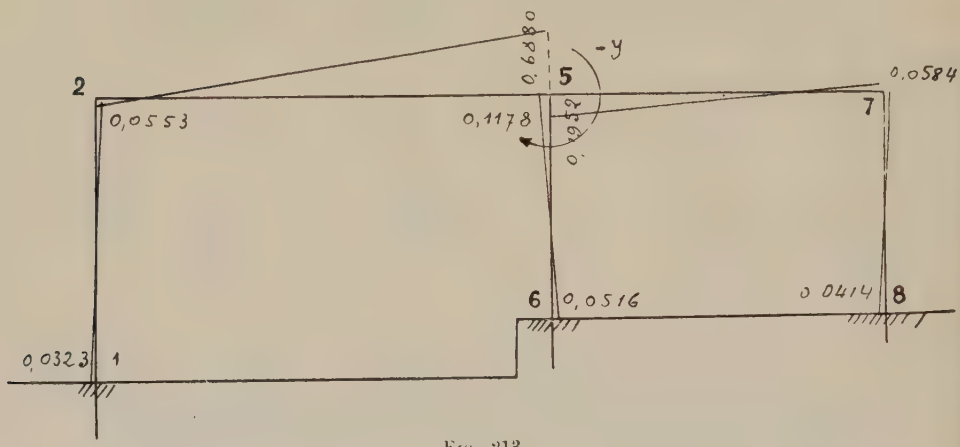


Fig. 213.

B'. *Méthode des appuis auxiliaires.* — Par la méthode auxiliaire il n'y a qu'à prendre, changés de signes, les moments indiqués aux figures 200 et 201, et leur retran-

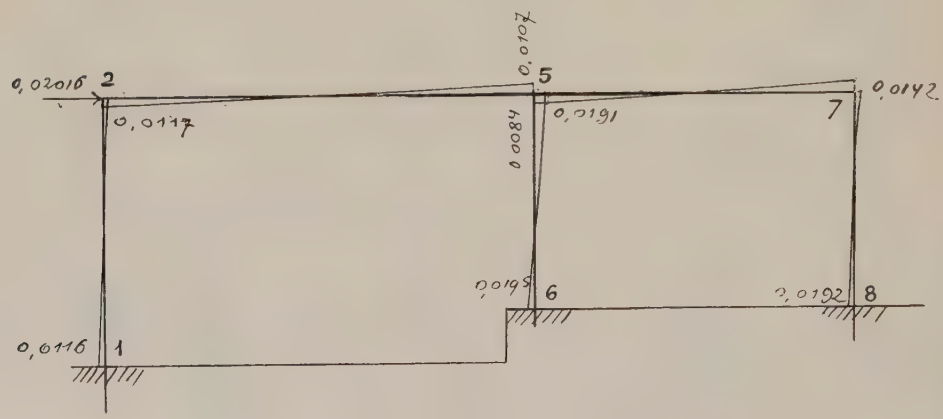


Fig. 214.

cher ceux qui sont provoqués par les réactions des appuis auxiliaires ; soit pour — x :

$$\frac{0,1233 + 0,0646}{5,5} = 0,03362$$

$$\frac{0,0614 + 0,0307 - 0,0210 - 0,0105}{4,5} = 0,01346.$$

$$F = 0,03362 - 0,01346 = 0,02016. \qquad \text{(fig. 214)}$$

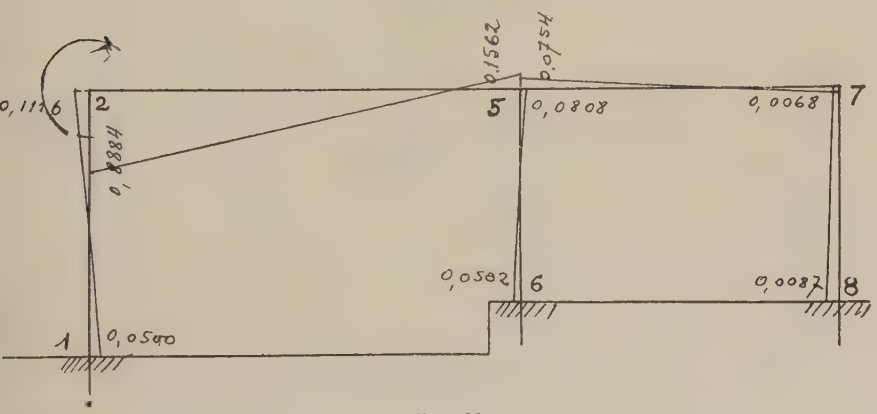


Fig. 215.

Les moments à retranchers ont donnés par la figure 200 ; cette opération faite, on a les moments dus à — x donnés par la figure 215.

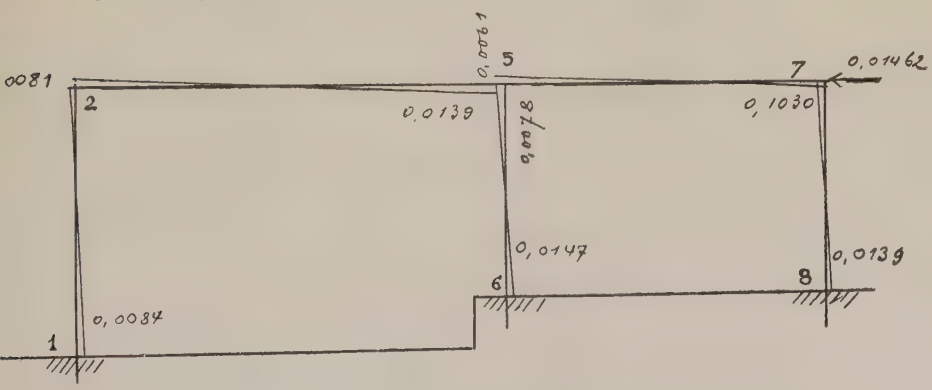


Fig. 216.

Pour — y, la force d'entraînement calculée comme plus haut est 0,01462 (fig. 216), les moments à retrancher de la

figure 201 sont donnés par la figure 216. Cette opération faite, on a les moments indiqués à la figure 217.

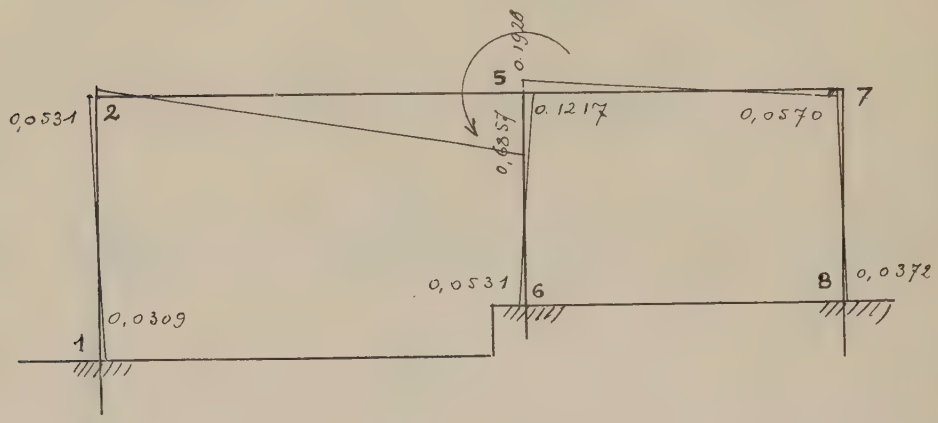


Fig. 217.

DEUXIÈME ÉTAGE

Étudions maintenant l'étage supérieur par les deux méthodes :

c) Méthode directe.

Cadre rectangulaire à appuis à rotules (fig. 218).

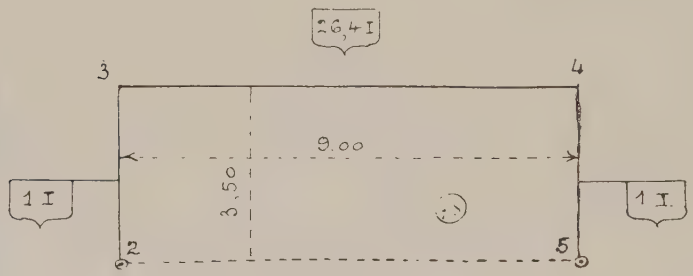


Fig. 218.

Commençons par calculer les caractéristiques simples qui sont données par les intégrales suivantes :

$$\int_2^3 ds = \int_2^3 dy = 3{,}50 \qquad \int_3^4 ds = \int_3^4 dx = 9{,}00$$

$$\int_4^5 ds = \int_4^5 dy = 3{,}50 \qquad \int_2^3 xds = 0$$

$$\int_3^4 xds = {}_2^3\left[\frac{x^2}{2}\right] = \frac{9^2}{2} = 4{,}50$$

$$\int_4^5 xds = 9\int_4^5 ds = 9 \times 3{,}5 = 31{,}50$$

$$\int_2^3 yds = {}_2^3\left[\frac{y^2}{2}\right] = \frac{\overline{3{,}5}^2}{2} = 6{,}125$$

$$\int_3^4 yds = 3{,}5\int_3^4 dx = 3{,}5 \times 9 = 31{,}50$$

$$\int_4^5 yds = \int_5^4 ydy = {}_5^4\left[\frac{y^2}{2}\right] = \frac{\overline{3{,}5}^2}{2} = 6{,}125$$

$$\int_2^3 x^2ds = 0 \qquad \int_3^4 x^2ds = {}_3^4\left[\frac{x^3}{3}\right] = \frac{9^3}{3} = 243$$

$$\int_4^5 x^2ds = 9^2 \int_5^4 dy = 81 \times 3{,}5 = 283{,}50$$

$$\int_2^3 y^2ds = {}_2^3\left[\frac{y^3}{3}\right] = \frac{\overline{3{,}5}^3}{3} = 14{,}2916$$

$$\int_3^4 y^2ds = 3{,}5^2\int_3^4 dx = \overline{3{,}5}^2 \times 9 = 110{,}25$$

$$\int_4^5 yds = \int_5^4 y^2dy = {}_5^4\left[\frac{y^3}{3}\right] = \frac{\overline{3{,}5}^3}{3} = 14{,}2916$$

$$\int_2^3 xyds = 0, \qquad \int_3^4 xyds = 3{,}5\int_3^4 xds = 3{,}5 \times 40{,}50 = 141{,}75$$

$$\int_4^5 xyds = 9\int_4^5 yds = 9 \times 6{,}125 = 55{,}125.$$

Nous en déduirons le tableau ci-après des caractéristiques simples :

	2 à 3	3 à 4	4 à 5
	—	—	—
$\int ds$.	3,5	9,00	3,5
$\int xds$	0	40,50	31,50
$\int yds$	6,125	31,50	6,125
$\int x^2ds$	0	243,00	283,50
$\int y^2ds$	14,2916	110,25	14,2916
$\int xyds$. . . .	0	141,75	55,125

D'où le tableau des caractéristiques d'utilisation obtenu en divisant les colonnes 2 à 3 et 4 à 5 par I, et la colonne 3 à 4 par 26,4. I. Comme I disparaît dans les calculs, nous ne l'indiquerons pas aux résultats suivants :

	2 à 3	3 à 4	4 à 5
$\int ds$	3,5	0,3409	3,5
$\int xds$	0	1,5342	31,50
$\int yds$	6,125	1,1932	6,125
$\int x^2ds$.	0	9,2045	283,50
$\int y^2ds$.	14,292	4,1761	14,292
$\int xyds$	0	5,3693	55,125

Force horizontale F appliquée en 3 (fig. 219).

La formule de Bresse qui donne les déplacements relatifs des appuis est :

$$\Delta y_5 - \Delta y_2 = \Omega_2 (x_5 - x_2) - \int_2^5 \frac{\mathfrak{M}}{EI} (x_5 - x_2)\, ds.$$

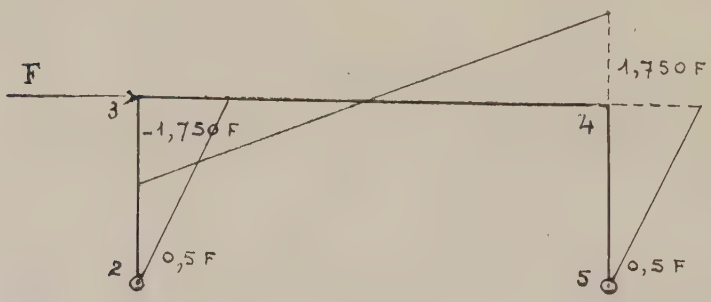


Fig. 219.

Comme cette différence est nulle :

$$9\Omega_2 - 9\int_2^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} + \int_2^5 \frac{Mxds}{EI} = 0,$$

on a :

$$\Omega_2 = \int_2^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} - \frac{1}{9}\int_2^5 \frac{\mathfrak{M}xds}{EI}.$$

D'autre part :

$$\Omega_5 - \Omega_2 = \int_2^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} = \frac{1}{9} \int_2^5 \frac{\mathfrak{M} x ds}{EI},$$

les expressions $\int_2^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI}$ et $\int_2^5 \frac{\mathfrak{M} x ds}{EI}$ sont donc à effectuer séparément.

1° *Calcul de* $\int_2^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI}$:

$$\int_2^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} = \int_2^3 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} + \int_3^4 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} + \int_4^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI}.$$

Nous avons comme expressions des moments de flexion :

Sur 2-3 . . . . $\mathfrak{M} = Qy$
3-4 . . . . $\mathfrak{M} = Qy - Vx$
— 4-5 . . . . $\mathfrak{M} = Qy - Vx - F(3,5 - y)$.

Prenons les valeurs des intégrales calculées au préalable et figurant au tableau des caractéristiques d'utilisation :

$$Q \int_2^3 y ds$$

$$Q \int_3^4 \frac{y ds}{26,4} - V \int_3^4 \frac{x ds}{26,4}$$

$$Q \int_4^5 \frac{y ds}{26,4} - V \int_4^5 \frac{x ds}{26,4} - 3,5 F \int_4^5 ds + F \int_4^5 y ds,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{array}{lll} 6,1250\,Q & & \\ 1,1932 & - \; 1,5342\,V & - (3,5 \times 3,5 - 6,125)\,F \\ \underline{6,1250} & - \; \underline{31,500} & - \; \underline{6,125} \\ \int_2^5 M ds = 13,4432\,Q & - \; 33,0342\,V & - \; 6,125\,F \end{array}$$

Par raison de symétrie de la figure, $Q = -0,5F$ et les moments pris par rapport à 5 donnent :

$$-3,5F - 9V = 0$$

d'où :

$$V = -0,3888F$$

et :

$$\int_2^5 M ds = -13,4432 \times 0,5F = 33,034 \times 0,3888F - 6,125F = 0,$$

ce qui était évident, eu égard aussi à la symétrie de la construction :

2° *Calcul de* $\int_2^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI}$:

$$\int_2^3 \frac{\mathfrak{M}xds}{EI} + \int^4 \frac{\mathfrak{M}xds}{EI} + \int_4^5 \frac{\mathfrak{M}xds}{EI}.$$

Comme plus haut, faisons abstraction de EI, qui disparaissent. En tenant compte des intégrales d'utilisation :

$$Q \int_2^3 \frac{xyds}{26,4}$$

$$Q \int_3^4 \frac{xyds}{26,4} - V \int_3^4 x^2 ds.$$

$$Q \int_4^5 \frac{xyds}{26,4} - V \int_4^5 x^2 ds - 3,5\,F \int_4^5 xds + F \int_4^5 xyds,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{array}{l} 5,3693\,Q - 9,2045\,V \\ 55,125\ Q - 283,500\,V - 3,5 \times 31,5\,F + 55,125\,F \\ \hline -0,60,4943 \times 0,5\,F + 292,7045 \times 0,3888\,F - 55,125\,F - 28,4311\,F \end{array}$$

$$\int_2^5 \mathfrak{M}xds = -30,247\,F - 113,8030\,F + 55,125\,F = 28,4311\,F$$

d'où :

$$\Omega_2 = -\frac{28,4311\,F}{9\,EI} = -\frac{3,1590\,F}{EI} \qquad \text{(fig. 220)}$$

$$\Omega_3 = \Omega_2 - \int_3^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} = \frac{-3,1590\,F}{EI}.$$

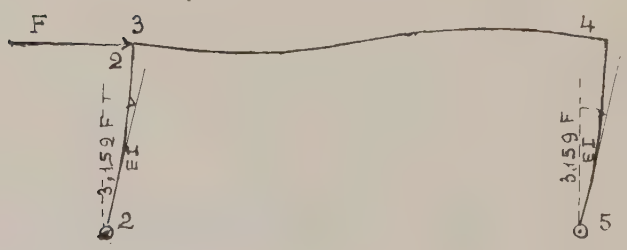


Fig. 220.

Moment incident en 2 (fig. 221).

Nous allons maintenant calculer la poussée en 2, les déplacements angulaires en 2 et 5 dus à un moment μ appliqué en 2. Les moments de flexion sont :

Sur 2-3 . . . . . $\mathfrak{M} = \mu + Qy$
— 3-4 . . . . . $\mathfrak{M} = \mu + Qy - Vx$
— 4-5 . . . . . $\mathfrak{M} = \mu + Qy - 9x.$

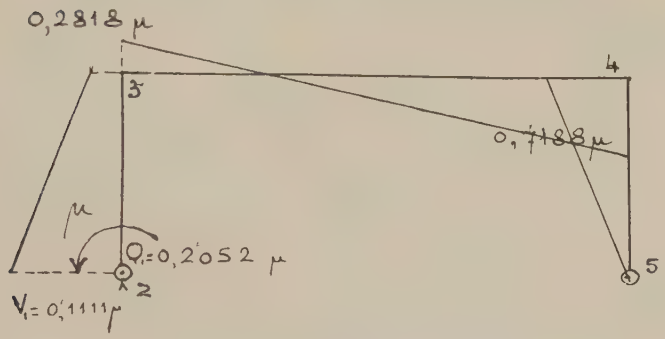


Fig. 221.

Les expressions pour $\int_2^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{I}$ et $\int_2^5 \frac{\mathfrak{M}xds}{I}$ sont les mêmes que précédemment, sauf à ajouter un terme additif en m pour chacune d'elles :

$$\int_2^3 \mu ds = \mu \int_2^3 ds, \qquad \int_3^4 \frac{\mu ds}{26,4} = \mu \int_3^4 \frac{ds}{26,4},$$
$$\int_4^5 \mu ds = \mu \int_4^5 ds,$$

donc :

$$(3,5 + 0,3409 + 3,5)\mu = 7,3409\mu$$

et :

$$\int_2^5 \mathfrak{M}ds = 7,3409\mu + 13,4432\,Q - 33,0342\,V.$$

Pour $\int_2^5 \mathfrak{M}xds$, nous avons :

$$\mu\left(\int_2^3 xds + \int_3^4 \frac{xds}{26,4} + \int_4^5 xds\right)$$
$$= (0 + 1,5342 + 31,500)\mu = 33,0342\mu,$$

soit :

$$\int_2^5 \frac{\mathfrak{M}xds}{I} = 60,4943\,Q - 292,7405\,V + 33,0342\,\mu.$$

Q sera obtenu en appliquant la formule de Bresse suivante :

$$U_5 - U_2 = \Omega_2(y_5 - y_2) - y_5 \int_2^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{EI} + \int_2^5 \frac{\mathfrak{M}yds}{EI} = 0.$$

De 2 à 5, on a :

$$\mu \int_2^3 yds + Q \int_2^3 yds$$

$$\mu \int_3^4 \frac{yds}{26,4} + Q \int_3^4 \frac{yds}{26,4} - V \int_3^4 \frac{xyds}{26,4}$$

$$\mu \int_4^5 yds + Q \int_4^5 yds - V \int_4^5 xyds,$$

soit :

$$\begin{array}{l} 6,1250\,\mu + 14,2920\,Q \\ 1,1932\,\mu + \ \ 4,1761\,Q - \ \ 5,3693\,V \\ \underline{6.1250\,\mu} + \underline{14.2920\,Q} - \underline{55.1250\,V} \\ 13,4432\,\mu + 32,7601\,Q - 60,4943\,V \end{array}$$

mais :

$$\mu - 9V = 0, \qquad V = \frac{\mu}{9} = 0,1111\,\mu,$$

d'où :

$$13,4432\mu + 32.7601\,Q - 6,7209\,\mu = 0$$

$$Q = \frac{-6,7209}{32,7601}\,\mu = -0,2052\,\mu,$$

donc :

$$\int_2^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{I} = 7,3409\,\mu - 13,4432 \times 0,2052\,\mu - 33,0342$$

$$\times 0,1111\,\mu = 0,9123\,\mu$$

et :

$$\int_2^5 \mathfrak{M}xds = -60,4943 \times 0,2052 - 292,7405 \times 0,1111\,\mu$$

$$+ 33,0342\,\mu = -11,9123\,\mu,$$

d'où :

$$\Omega_2 = \int_2^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} - \frac{1}{9}\int_2^5 \frac{\mathfrak{M} x ds}{EI}$$

$$\Omega_2 = \frac{0,9123}{EI}\mu - \frac{11,9123}{EI}\mu = \frac{2,2354}{EI}\mu \quad \text{(fig. 222).}$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{9}\int_2^5 \frac{\mathfrak{M} x ds}{EI} = \frac{1,3254}{EI}\mu.$$

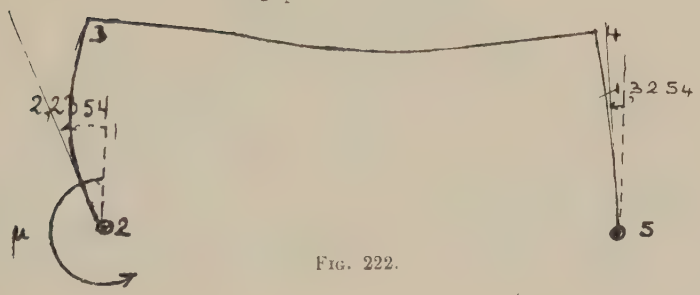


Fig. 222.

Charge uniformément répartie p par mètre courant sur la traverse 3-4 (fig. 223).

Moments de flexion de :

2 à 3 . . . . . $\mathfrak{M} = Qy$

3 à 4 . . . . . $\mathfrak{M} = Qy - Vx + \frac{px^2}{2}$

4 à 5 . . . . . $\mathfrak{M} = Qy - Vx + \frac{px9^2}{2}$.

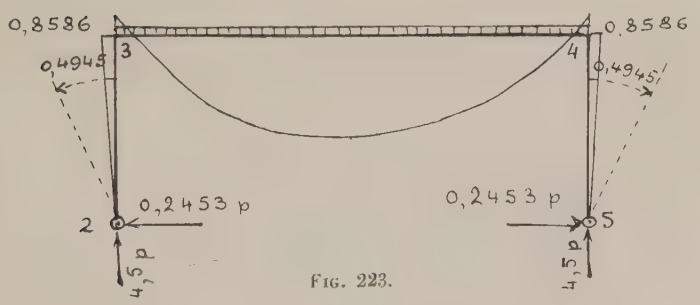


Fig. 223.

1° Calcul de Q à l'aide de la formule de Bresse :

$$\int_2^5 \frac{\mathfrak{M} y ds}{EI} = 0.$$

Il y a donc à établir comme nouvelles caractéristiques utilisables :

$$\int_3^4 \frac{px^2yds}{2 \times 26,4} \quad \text{et} \quad \frac{p \times 9^2}{2} \int_4^5 yds$$

$$\int_3^4 \frac{px^2yds}{2 \times 26,4} = \frac{p}{2} \int_3^4 \frac{x^2yds}{26,4} = \frac{3,5p}{2 \times 26,4} \int_3^4 x^2ds$$

$$= \frac{1,75p}{26,4} \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_3^4 = 16,1080\,p,$$

et :

$$\frac{p \times 9^2}{2} \int_4^5 yds = -\frac{p \times 9^2}{2} \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_5^4 = -\frac{9^2}{2} \times \frac{\overline{3,5}^2}{2} = 248,0625p$$

$\int_2^5 \frac{\mathfrak{M}yds}{\mathrm{EI}} = 0$ devient :

$$32,7601\,\mathrm{Q} - 60,4943\,\mathrm{V} + (16,1080 + 248,0625)\,p = 0$$

mais :

$$\mathrm{V} = 4,5p$$
$$60,4943 \times 4,5p = 272,2185p$$
$$(16,1080 + 248,0625)\,p = 264,1705\,p,$$

d'où :

$$\mathrm{Q} = \frac{8,0480}{32,7601}\,p = 0,2453\,p.$$

La variation angulaire en 2 est obtenue par la formule :

$$\Omega_2 = \int_2^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{\mathrm{EI}} - \frac{1}{\vartheta} \int_2^5 \frac{\mathfrak{M}xds}{\mathrm{EI}},$$

mais pour $\int_2^5 \frac{\mathfrak{M}ds}{\mathrm{EI}}$, il faut calculer les intégrales supplémentaires des caractéristiques d'utilisation :

$$\int_3^4 \frac{px^2ds}{2 \times 26,4} \quad \text{et} \quad \int_3^4 \frac{p \times 9^3}{2}\,ds$$

$$\int_3^4 \frac{px^2ds}{2 \times 26,4} = \frac{p}{2} \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_3^4 \frac{ds}{26,4} = 4,6023p$$

$$\int_4^5 \frac{p \times 9^2}{2}\,ds = \frac{9^2p}{2} \int_4^5 ds = 141,75p$$

qui donne :

$$13,4432\,\mathrm{Q} - 33,0342\,\mathrm{V} + 146,3523\,p$$

Pour $\int_2^5 \frac{\mathfrak{M} x ds}{EI}$, nous avons encore à établir :

$$\frac{p}{2}\int_3^4 \frac{x^3 ds}{26,4} = \frac{p}{8} \times \frac{9^4}{26,4} = 31,0653p$$

et :

$$\frac{p}{2} 9^2 \int_4^5 x ds = \frac{p}{2} 9^3 \times 3,5 = 1275,7500p$$

$$(31,0653 + 1275,7500)p = 1306,8153p$$

d'où :

$$60,4942 Q - 292,7046 V + 1306,8153p.$$

Q et V connus, on a :

$$\int_2^5 \mathfrak{M} ds = 13,4432 \times 0,2453p - 33,0342 \times 4,5p + 146,3523p = 0,9893p$$

et pour $\int_2^5 \mathfrak{M} x ds$:

$$60,4942 \times 0,2453p - 272,7046p \times 4,5p + 1306,8158p = 4,4535p$$

d'où :

$$\Omega_2 = \frac{0,9893}{EI} p - \frac{4,4535}{EI} p - \frac{0,4945}{EI} p$$

$$\Omega_5 = \frac{4,4535}{9EI} p = -\frac{0,4948}{EI} p. \qquad \text{(fig. 223)}$$

Force verticale agissant sur la traverse (fig. 224).

Pour une force isolée P agissant au point α de la traverse 3-4, les moments en suivant la fibre moyenne sont :

De 2 à 3 . . . . $\mathfrak{M} = Qy$
— 3 à α . . . . $\mathfrak{M} = Qy - Vx$
— α à 4 . . . . $\mathfrak{M} = Qy - Vx + P(x - m$
— 4 à 5 . . . . $\mathfrak{M} = Qy - Vx + Pn.$

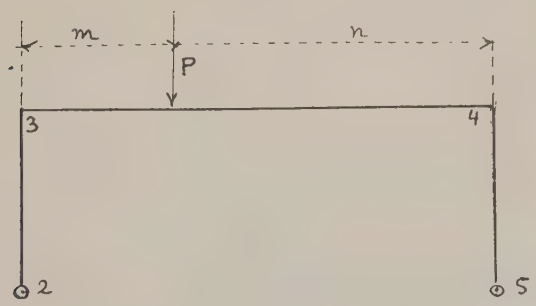


Fig. 224.

Pour avoir Q, appliquons la formule de Bresse réduite à :

$$\int_2^6 \frac{\mathfrak{M} y ds}{EI} = 0.$$

De 2 à 3 ..... $\mathfrak{M} = Qy^2$
De 3 à α ..... $\mathfrak{M} = Qy^2 - Vxy$
De α à 4 ..... $\mathfrak{M} = Qy^2 - Vxy + P(xy - my)$
De 4 à 5 ..... $\mathfrak{M} = Qy^2 - Vxy + Pny$.

On a donc :

$$Q\int_2^5 \frac{y^2 ds}{EI} - V\int_3^5 \frac{xyds}{2EI} + P\int_\alpha^4 \frac{(xy - my)}{26,4} ds + P\int_4^5 \frac{Pnyds}{EI}.$$

En tenant compte des caractéristiques utilisables en éliminant I afférent à 2-3 et 4-5 qui figure à tous les dénominateurs :

$$\int_2^5 y^2 ds = 32,7601 \qquad \int_3^5 \frac{xyds}{26,4} = 60,4943$$

$$\int_\alpha^5 xyds = 3,5 \int_\alpha^5 xds = 3,5 \left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^5 = \frac{(9^2 - m^2)}{2} 3,5$$

$$\int_\alpha^5 yds = 3,5 \int_\alpha^5 ds = 3,5 n;$$

d'où l'équation :

$$32,7601 Q \quad 60,4943 V + P\left[\frac{\frac{(9^2 - m^2)}{2} - mn}{26,4} + \frac{3,5}{2}\right] \times 3,5 = 0,$$

mais :

$$-9V = nP;$$

d'où :

$$V = -\frac{nP}{9}.$$

Trois forces verticales agissant sur la traverse (fig. 225).

Pour les trois forces d'intensité P :

$$n = 6,75 + 4,50 + 2,25 = 13,50;$$

Donc le deuxième terme devient :

$$-\frac{60,4943}{9} \times 13,5 = -90,7414.$$

Pour ces trois forces $9^2 - m^2$ devient :

$$\begin{aligned} 9^2 - 2,25^2 &= 81 - 5,0625 \\ 9^2 - 4,50^2 &= 81 - 20,2500 \\ 9^2 - 6,75 &= 81 - 45,8750 \\ \hline & 243 - 70,875 = 172,1250 \end{aligned}$$

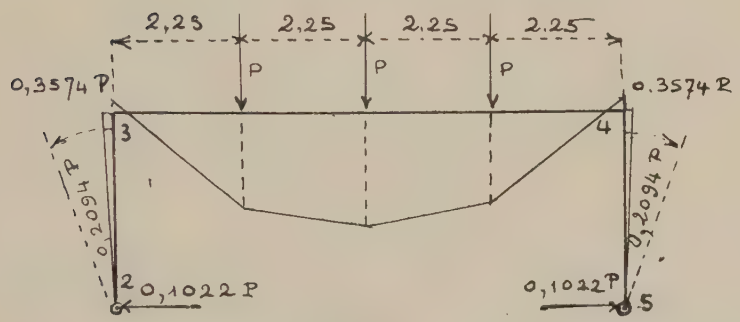


Fig. 225.

et :

$$\frac{172,1250}{2} = 81,0625,$$

et mn :

$$\begin{aligned} 2,25 \times 6,75 &= 15,1875 \\ 4,50 \times 4,50 &= 20,2000 \\ 6,75 \times 2,25 &= 15,1875 \\ \hline & 50,5750 \end{aligned}$$

donc :

$$\Sigma \frac{9^2 - m^2}{2} - mn = 81,0625 - 50,5750 = 35,4875,$$

et :

$$\frac{35,4875}{26,400} = 1,3442;$$

enfin :

$$\frac{3,5n}{2} = \frac{3,5 \times 13,5}{2} = 23,625,$$

$$23,625 + 1,3442 = 24,9692 \times 3,5 = 87,3922,$$

et, finalement :

$$32,7601\,Q - 90,7414\,P + 87,3922\,P;$$

où :

$$Q = \frac{3,3492\,P}{3,2760} = 0,1022\,P.$$

Cherchons Ω_2 en appliquant la formule de Bresse :

$$V_1 - V_0 = \Omega_0 (x_1 - x_0) = \int_{s_0}^{s_1} \frac{\mathfrak{M}}{EI} (x_1 - x) ds,$$

qui devient :

$$\Omega_2 \times 9 - 9 \int_2^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} + \int_2^5 \frac{\mathfrak{M} x ds}{EI} = 0,$$

$$\Omega_2 = \int_2^5 \frac{\mathfrak{M} ds}{EI} - \frac{1}{9} \int_2^5 \frac{\mathfrak{M} x ds}{EI}.$$

Le dernier en fonction de P est donné par l'intégration de 2 à 5 du terme :

$$\frac{-P(x-m)\,ds}{26,4} - Pnds,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{P\int_\alpha^4 x ds - P\int_\alpha^4 m ds}{26,4} = \frac{P\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^4 - Pm\left[x\right]_\alpha^4}{26,4}$$

soit :

$$P\frac{(9^2 - m^2)}{2} + Pnm \qquad \text{et} \qquad \int_2^5 Pnds = 3,5nP,$$

et, finalement :

$$P\left(\frac{mn - \frac{9^2 - m^2}{2}}{26,4} + 3,5n\right) = (1,3422 + 3,5 \times 13,5)P.$$

Pour $\int_2 \mathfrak{M} x ds$, on a le terme :

$$\frac{Px^2 + Pmx}{26,4} + \frac{Pnx}{26,4},$$

à intégrer de 2 à 5, ce qui donne :

$$-\left[\frac{x_3}{3}\right]_{\alpha}^{4} + m.\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{4} - \mathrm{P}n\int_4^5 x\,ds,$$

$$\mathrm{P}\left[\frac{-\frac{9^3-m^3}{3}+m\frac{(9^2-m^2)}{2}}{26,4}-9\times 3,5\,n\right]=(9,4878-9\times 3,5\times 13,5)\,\mathrm{P}.$$

Appliquons la formule ci-dessus :

$$\frac{\begin{array}{l}+13,4432\,\mathrm{Q}-33,03422\,\mathrm{V}+1,342\,\mathrm{P}+3,5\times 13,5\,\mathrm{P}\\-60,4943\,\mathrm{Q}+292,7045\,\mathrm{V}-9,4878\,\mathrm{P}-3,5\times 13,5\,\mathrm{P}\end{array}}{9}$$

soit :

$$6,7212\,\mathrm{Q}-0,5116\,\mathrm{V}+1,3422\,\mathrm{P}-1,0543\,\mathrm{P}.$$

Remplaçons Q par 0,1022 P et V par 1,5 P, nous avons enfin :

$$\Omega_2=\frac{0,6869\,\mathrm{P}-0,7674\,\mathrm{P}+1,3422\,\mathrm{P}-1,10543\,\mathrm{P}}{\mathrm{EI}},$$

$$\Omega_2=\frac{0,2094\,\mathrm{P}}{\mathrm{EI}}. \qquad \text{(fig. 225)}$$

D. — Méthode des appuis auxiliaires.

Coefficients de proportionnalité (fig. 226).

$\rho_{2-3}=0,$

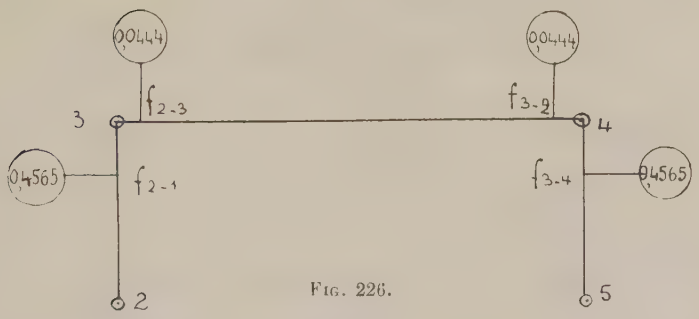


Fig. 226.

puisque l'appui 2 est à rotule ;

$$\rho_{3-4}=\frac{1}{2+2\times 3,5\times\frac{26,4}{9}}=0,444,$$

$$\rho_{4-5}=\frac{1}{2+\frac{(2-0,0444)}{3,5\times 26,4}\,9}=0,4565.$$

Force horizontale appliquée en 3 (fig. 227). — Par raison de symétrie, on a :

$$Q_2 = Q_5 = \frac{F}{2}.$$

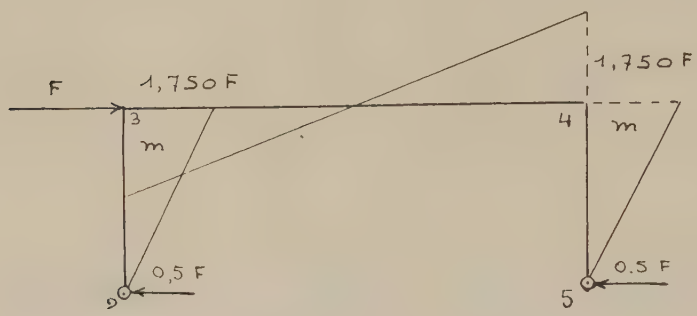


FIG. 227.

L'action de F est identique à $\frac{2m}{3,5}$,

d'où :

$$F = \frac{2m}{3,5} \qquad \text{et} \qquad m = \frac{3,5\,F}{2} = 1,750\,F.$$

Calcul de Ω_2 :

Sur la traverse 3-4, on a :

$$\Omega_3 = \frac{(2M^2 + M_3)}{6 \times 26,4\,EI}\,9 = \frac{(-2 \times 1,750 + 1,750)}{6 \times 26,4\,.\,EI}\,F \times 9 = \frac{0,09943}{EI}\,F.$$

La formule de Bresse donne :

$$\Omega_2 = \Omega_3 + \int_2^3 \frac{\mathfrak{M}\,ds}{EI},$$

mais :

$$\int_2^3 \mathfrak{M}\,dx = -\frac{F}{2}\left(\frac{y^2}{2}\right) = -\frac{F \times 3,5^2}{4} = -3,0625\,F\,;$$

d'où :

$$\Omega_2 = -\frac{0,09943\,F}{EI} - \frac{3,0625\,F}{EI} = -\frac{3,1619\,F}{EI}.$$

De même, par raison de symétrie :

$$\Omega_5 = \frac{3,1619\,F}{EI}.$$

Moment incident en 2 (fig. 228).

Plaçons en 3 et 4 des appuis auxiliaires et appliquons en 2 un moment incident μ ; d'où :

$$m_3 = 0{,}4565\mu,$$
$$m_4 = 0{,}4565 \times 0{,}0044\mu = 0{,}0202\mu;$$

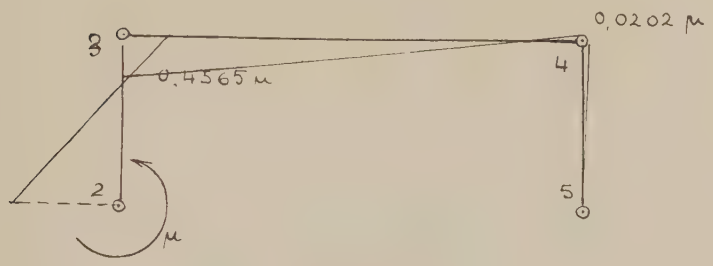


Fig. 228.

La force d'entraînement sera :

$$\frac{(1{,}4565 + 0{,}2020)}{3{,}50}\mu = 0{,}4219\,\mu,$$

elle provoque deux moments additifs en 3 et 4 de (fig. 229) :

$$1{,}750 \times 0{,}4219\mu = 0{,}7383;$$

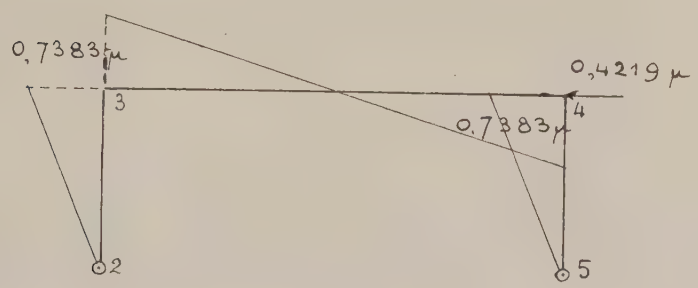


Fig. 229.

d'où les moments cherchés :

$$0{,}7383\mu - 0{,}4565\mu = 0{,}2818\mu$$
$$-0{,}7383\mu + 0{,}0202\mu = 0{,}7181\mu \qquad \text{(fig. 230)}$$

Déplacements angulaires. — Additionnons les déplacements angulaires des deux opérations ci-dessus :

$$\omega_2 = \frac{2\mu - 0{,}4565\mu}{6\,EI} = 0{,}9004\mu$$

Fig. 230.

$$\omega'_2 = \frac{3{,}619 \times 0{,}4219\mu}{6\,EI} = 1{,}3314\mu$$

d'où : $$\Omega_4 = \frac{2{,}2338\mu}{EI}$$

$$\omega_5 = \frac{0{,}0202 \times 3{,}5}{6\,EI} = -0{,}1118\mu$$

$$\omega'_5 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 1{,}3314\mu$$

d'où : $$\Omega_5 = \frac{1{,}3216\mu}{EI}$$

Charges sur la traverse 3-4.

Utilisons la méthode des encastrements auxiliaires et

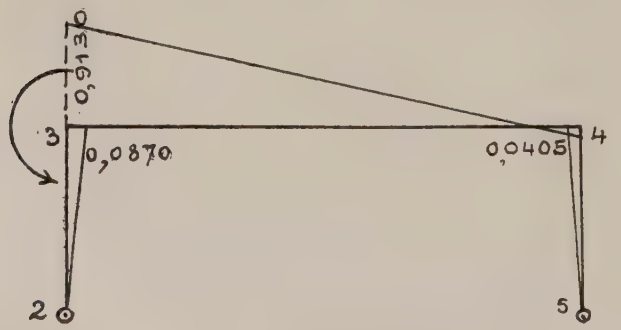


Fig. 231.

étudions d'abord la répartition d'un moment μ en 3 (fig. 231).

Variation angulaire pour 3-2 :

$$\Omega = \frac{2 \times 3,5}{6\,EI}\,x$$

pour :

$$\frac{(2 - 0,0444)}{6 \times 26,4\,EI}\,9y;$$

donc :

$$\frac{2 \times 3,5}{6\,EI}\,x = \frac{(2 - 0,0444)}{6 \times 26,4\,EI} \times 9y :$$

d'où :

$$y = \frac{1,9556 \times 9}{7 \times 26,4}\,x = 0,09524\mu,$$

on a :

$$x + y = \mu; \qquad \text{donc} \qquad x = \frac{\mu}{1,09524} = 0,91304\,\mu,$$

$$y = \mu - 0,91304\mu = 0,08696\mu$$

et le moment en 3 est :

$$0,9130 \times 0,0444 = 0,0405.$$

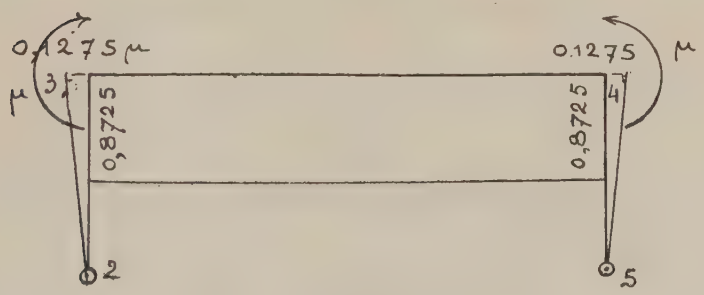


Fig. 232.

Si en 3 nous appliquons un moment $-\mu$ et en 4 un moment μ, si nous ajoutons ces deux séries de moments, nous avons ceux consignés sur la figure 232.

Charge continue (fig. 233).

Pour une charge continue de p par mètre courant, plaçons en 3 et 4 des encastrements auxiliaires, nous avons

en 3 un moment $\frac{pl^2}{12}$, et en 4 un moment $\frac{-pl^2}{12}$ (fig. 234).

Sur la construction à son état naturel, appliquons les

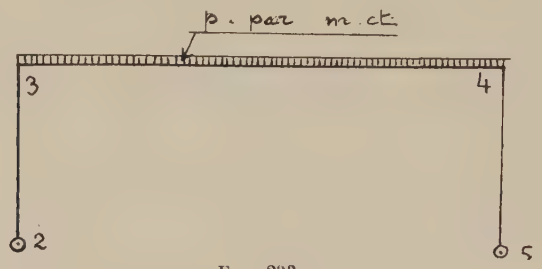


Fig. 233.

moments $\frac{-pl^2}{12}$ en 3, et $\frac{pl^2}{12}$ en 4, et additionnons-les à ceux de la traverse encastrée.

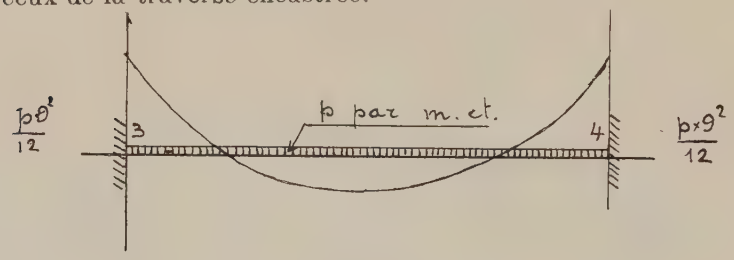


Fig. 234.

Or, la construction étant symétrique, il n'y a pas de force d'entraînement à prendre en considération, et l'on a ainsi pour moments :

$$M_3 = M_4 = \frac{0,1275 \times 9^2 p}{12} = 0,8606\, p. \qquad \text{(fig. 235)}$$

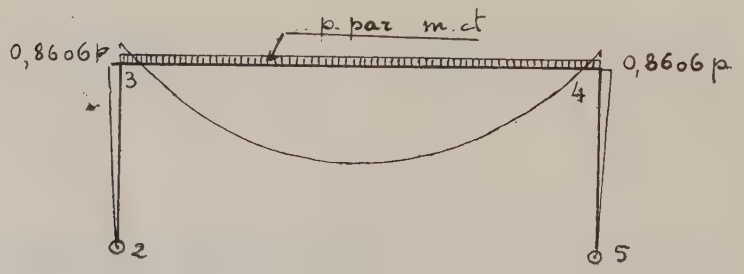


Fig. 235.

La réaction en 2 est :

$$\frac{0,8606p}{3,50}.$$

L'angle en 2 est donné de suite par la formule :

$$\Omega_2 = \frac{0,8606 \times 3,5p}{6\,EI} = \frac{0,5020p}{EI}.$$

Charges isolées (fig. 236). — Pour les trois forces appliquées en α, β et γ, opérons pareillement.

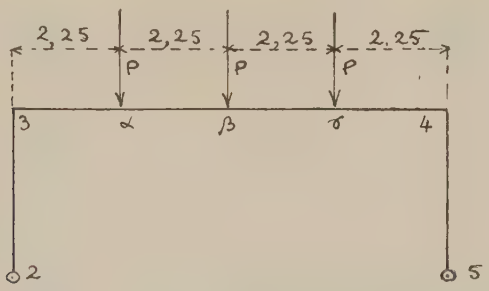


Fig. 236.

Pour une force P distante de a et de b de chacun des appuis d'une poutre encastrée à ses extrémités, on a :

$$M = \frac{ab^2P}{(a+b)^2},$$

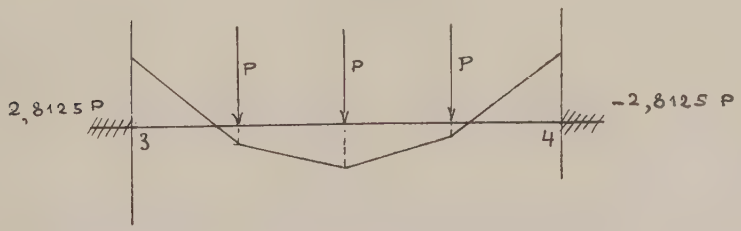


Fig. 237.

et pour les trois forces verticales données, nous aurons :

$$\frac{2,25 \times \overline{6,75}^2 + 4,5 \times \overline{4,5}^2 + 6,75 \times \overline{2,25}^2}{9^2} = 2,8125\,P. \quad \text{(fig. 237)}$$

Donc, comme moments en 3 et en 4 :

$$2{,}8125 \times 0{,}1275\,p = 0{,}3585\,\mathrm{P}, \qquad \text{(fig. 238)}$$

et la poussée en 2 et 5 :

$$\frac{0{,}3585\,\mathrm{P}}{3{,}5} = 0{,}1024\,\mathrm{P}.$$

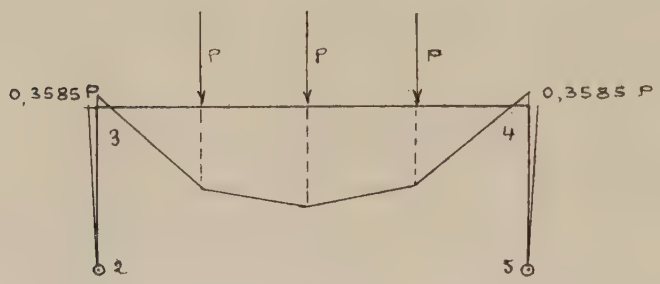


Fig. 238.

L'angle en 2 a pour valeur :

$$\Omega_2 = \frac{0{,}3585 \times 3{,}5\,\mathrm{P}}{6\,\mathrm{EI}} = \frac{0{,}2091\,\mathrm{P}}{\mathrm{EI}},$$

tandis que l'angle en 5 est identique, le signe changé :

$$\Omega_5 = -\frac{0{,}2091\,\mathrm{P}}{\mathrm{EI}}.$$

CONSTRUCTION A DEUX ÉTAGES

E. — Résolution.

MÉTHODE DIRECTE

Dans les calculs faits au cours des études de ces portiques, et en prenant les résultats obtenus par la méthode des appuis auxiliaires, on a pour le portique 2, 3, 4, 5,

les moments aux sommets 3 et 4 donnés par les formules (fig. 239) :

$$475 \times 0{,}8306 = 409$$
$$6.156 \times 0{,}3585 = 2.207$$
$$\overline{2.616}$$

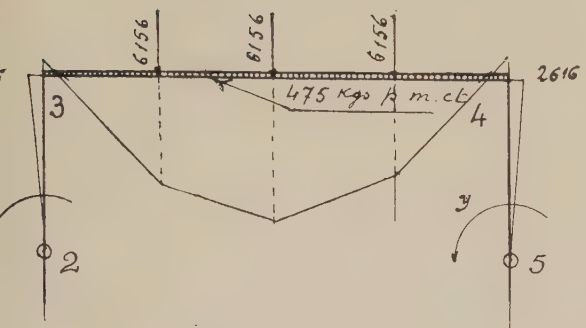


Fig. 239.

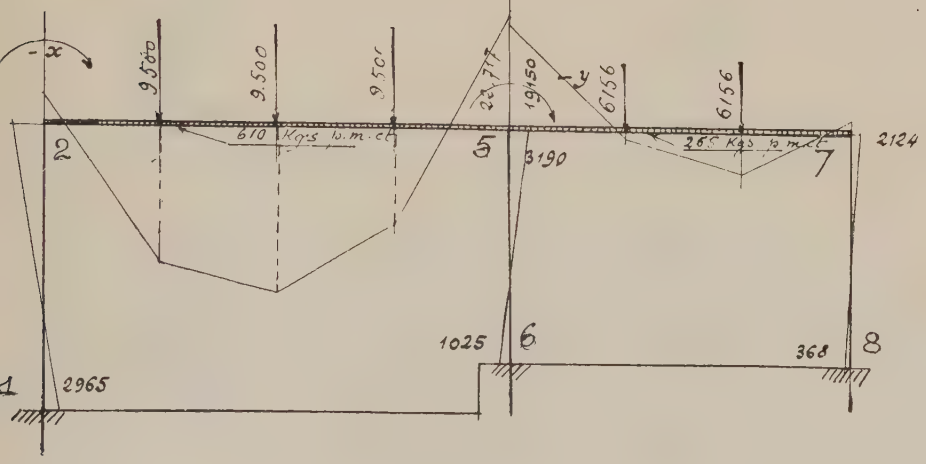


Fig. 240.

les déplacements angulaires correspondants en 2 et 5 sont :

$$475 \times 0{,}5020 = 238$$
$$6.156 \times 0{,}2091 = 1.287 \qquad \text{(fig. 241-242-243)}$$
$$\overline{1.525}$$

c'est-à-dire :

$$\omega_{2p} = \frac{1.525}{EI}, \qquad \omega_{5p} = -\frac{1.525}{EI}.$$

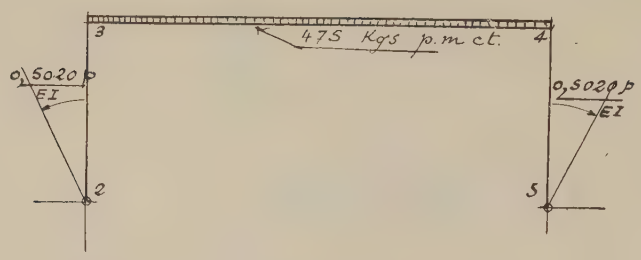


Fig. 241.

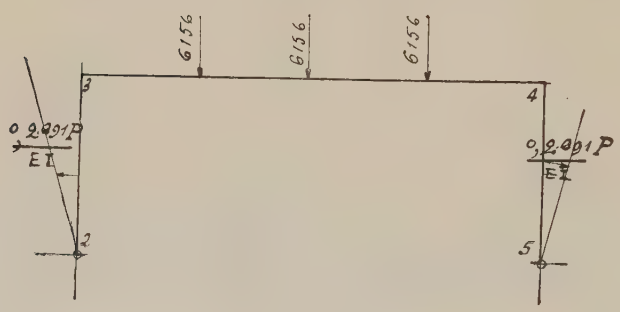


Fig. 242.

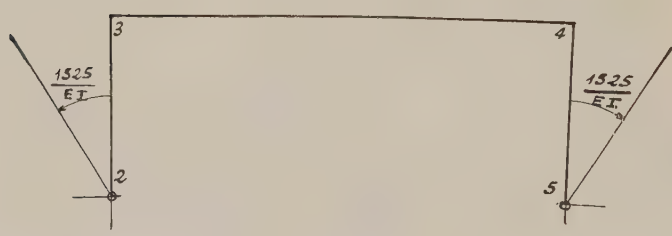


Fig. 243.

Pour le moment incident x en 2, on a :

$$\omega_{2x} = \frac{2,2338\,x}{EI},$$

$$\omega_{5x} = \frac{1,3216\,x}{EI}, \qquad \text{(fig. 244)}$$

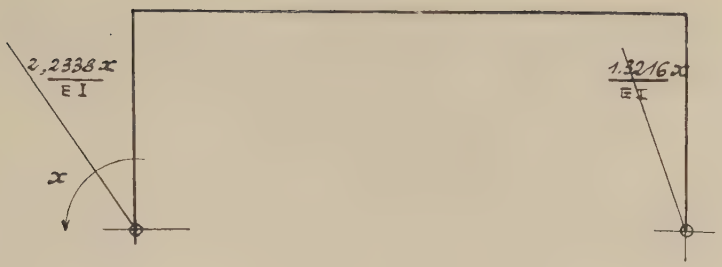


Fig. 244.

et pour le moment incident y en 5:

$$\omega_{2y} = \frac{1,3216y}{EI},$$

$$\omega_{5y} = \frac{2,2338y}{EI}, \qquad \text{(fig. 245)}$$

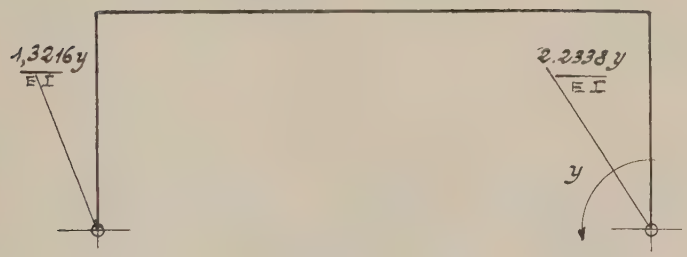


Fig. 245.

Finalement, additionnons ces déplacements angulaires, nous avons :

$$\Omega_2 = \frac{2,2338x + 1,3216y + 1.525}{EI},$$

$$\Omega_5 = \frac{1,3216x + 2,2338y - 1.525}{EI}.$$

Pour le premier étage se référant à la figure 240, on a les déplacements angulaires :

$$\omega_2 = -\frac{(-2,965 + 5,288)}{2 \times 3,8\,EI}\,5,50 = -\frac{1.645}{EI},$$

$$\omega_3 = -\frac{(1,1015 - 3,196)}{2 \times 4,2\,EI}\,4,50 = \frac{1,168}{EI}.$$

Pour le moment incident $-x$ appliqué en 2, les moments de flexion correspondants sont consignés sur la figure 246, et les correspondants angulaires en 2 et 5 sont :

$$\omega_{2x} = -\frac{(-0{,}0500 + 0{,}4116)}{2 \times 3{,}8\ EI} \times 5{,}5\ x = -0{,}04457\ x$$

$$\omega_{5x} = -\frac{(-0{,}0502 + 0{,}0808)}{2 \times 4{,}2\ EI} \times 4{,}5\ x = 0{,}01639\ x.$$

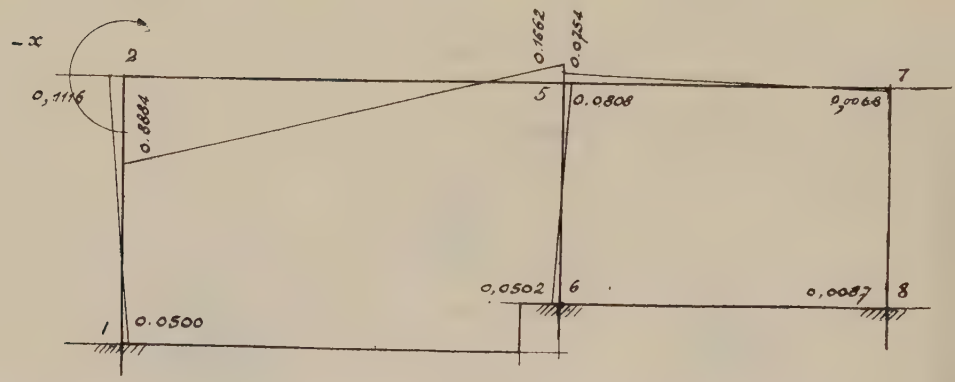


Fig. 246.

Pour le moment incident $-y$ appliqué en 5, les mo-

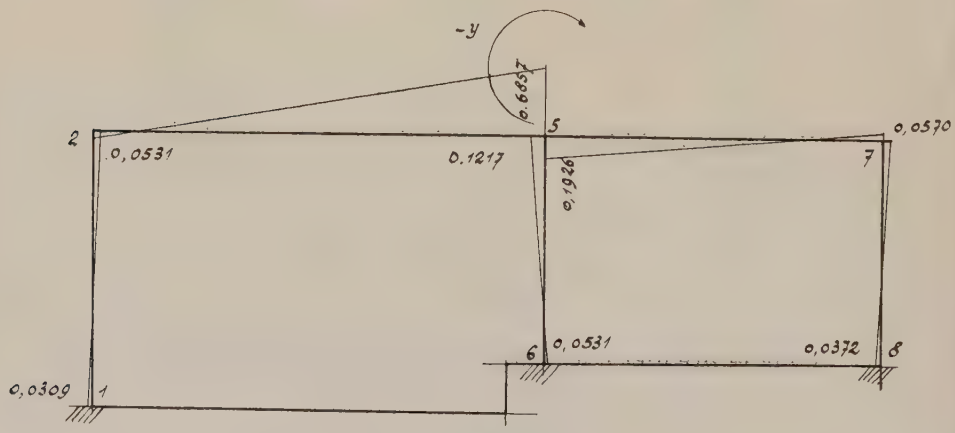


Fig. 247.

ments de flexion correspondants sont consignés sur la

figure 247, et les déplacements angulaires correspondants en 2 et 5 sont :

$$\omega_{2y} = -\frac{(-0,0309 + 0,0531)}{2 \times 3,8\,EI} \times 5,50\,y = \frac{0,01606\,y}{EI},$$

$$\omega_{5y} = -\frac{(-0,05306 + 0,1217)}{2 \times 4,2\,EI} \times 4,50\,y = -\frac{0,03556\,y}{EI}.$$

On a donc, en faisant la sommation de ces déplacements angulaires :

$$\Omega_2 = \frac{-1,645 - 0,04457\,x + 0,0160\,y}{EI},$$

$$\Omega_5 = \frac{1,163 + 0,01639\,x - 0,03556\,y}{EI}.$$

En égalant les déplacements membre à membre, on a le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$2,2338\,x + 1,3216\,y + 1,525 = -1,645 - 0,04457\,x + 0,01606\,y$$
$$1,3216\,x + 2,2338\,y - 1,525 = 1,163 + 0,01639\,x - 0,03556\,y$$

dont les racines sont :

$$x = -3,087$$

et :

$$y = 2,959.$$

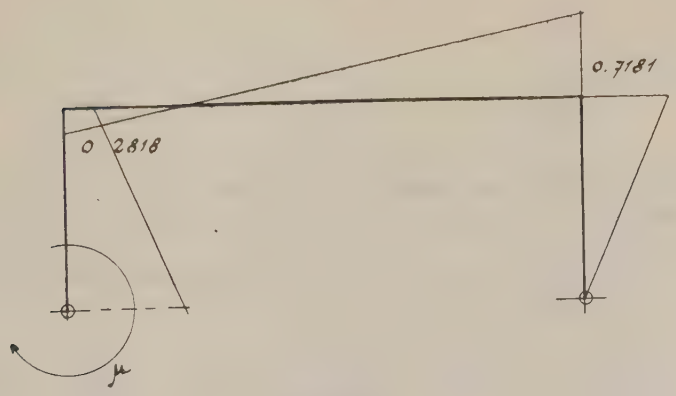


Fig. 248.

Pour le portique 2, 3, 4, 5, pour le moment incident $-\mu_2$, on a établi que :

$$\mu_3 = -0,2818\,\mu_2 \quad \text{et} \quad \mu_4 = 0,7181\,\mu_2 \qquad \text{(fig. 248)}$$

qui donnent :

$$m_2 = -3{,}087 \times 0{,}2818 = -\ 870$$
$$m_4 = \ \ 3{,}087 \times 0{,}7181 = \ \ 2.217 \qquad \text{(fig. 249)}$$

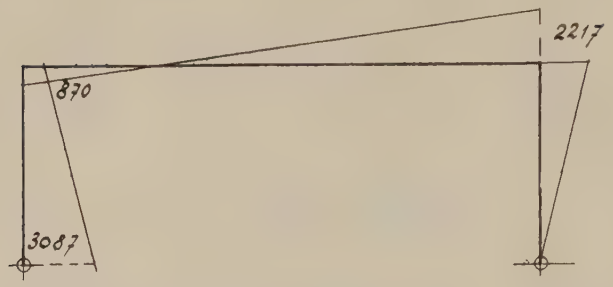


Fig. 249.

et pour :

$$m'_2 = 2.959 \times 0{,}2818 = -\ 834$$
$$m'_4 = 2.959 \times 0{,}7181 = \ \ 2.125. \qquad \text{(fig. 250)}$$

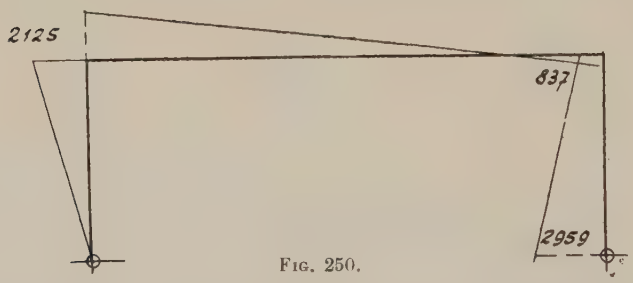


Fig. 250.

En ajoutant ces moments avec ceux de la figure 239, nous avons les résultats consignés dans la figure 251.

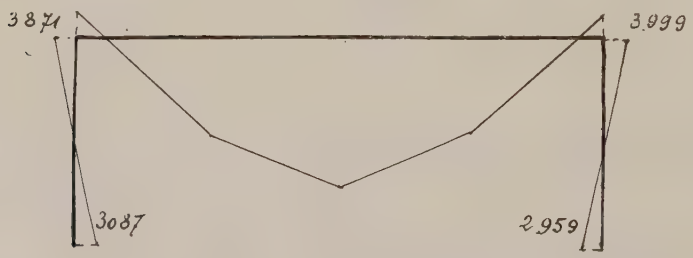


Fig. 251.

Passons ensuite au portique double du 1er étage; pour

un moment incident de 3.087 appliqué en 2, l'on a, d'après la figure 215 :

3.087 × 0,0500 =		154
» × 0,1116 =	—	345
3.087 — 345 =		2.742
3.087 × 0,1562 =	—	482
» × 0,0754 =	—	233
482 — 238 =	—	249
3.087 × 0,0502 =		124
3.087 × 0,0068 =		21
3.087 × 0,0087 =		27

résultats qui figurent au dessin (fig. 252).

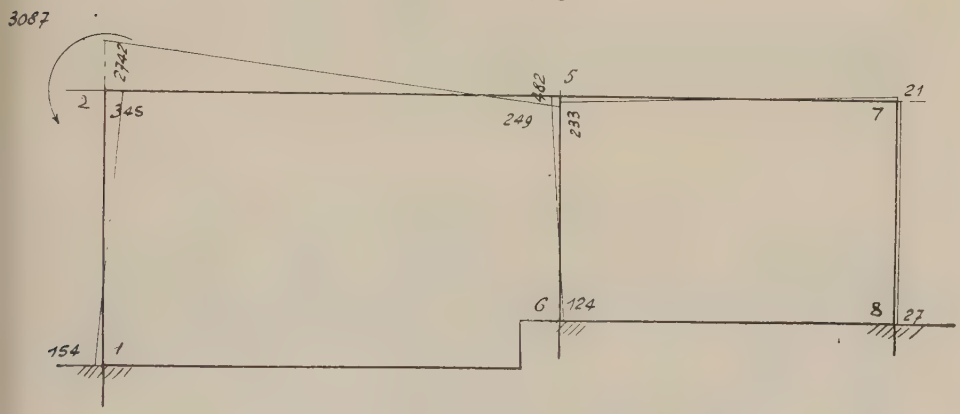


Fig. 252.

Pour le moment incident — 2.959 en 5, l'on a, d'après la figure 217 :

2.959 × 0,0309 =		91
» × 0,0531 =	—	157
» × 0,6857 =		2.026
» × 0,1217 =	—	360
» × 0,0531 =		157
» × 0,1926 =	—	573
» × 0,0570 =		168
» × 0,0372 =	—	111

résultats consignés sur la figure 253.

En les additionnant avec les moments de la figure 240, nous obtenons ceux de la figure 254.

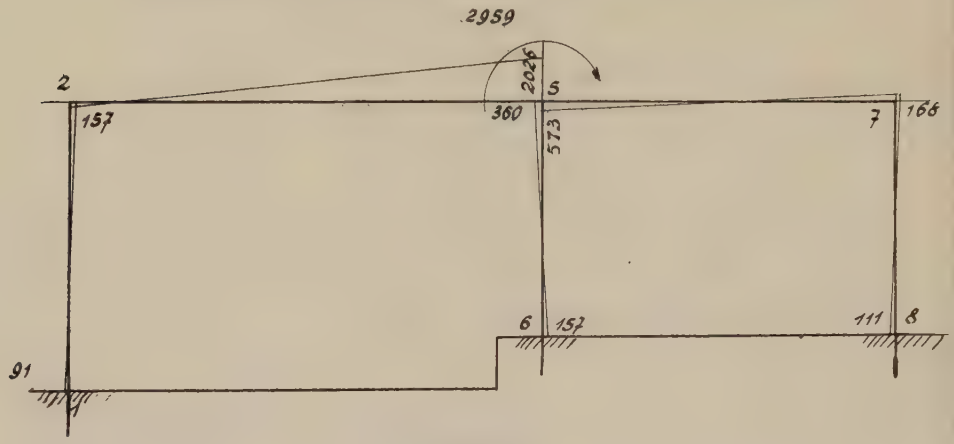


Fig. 253.

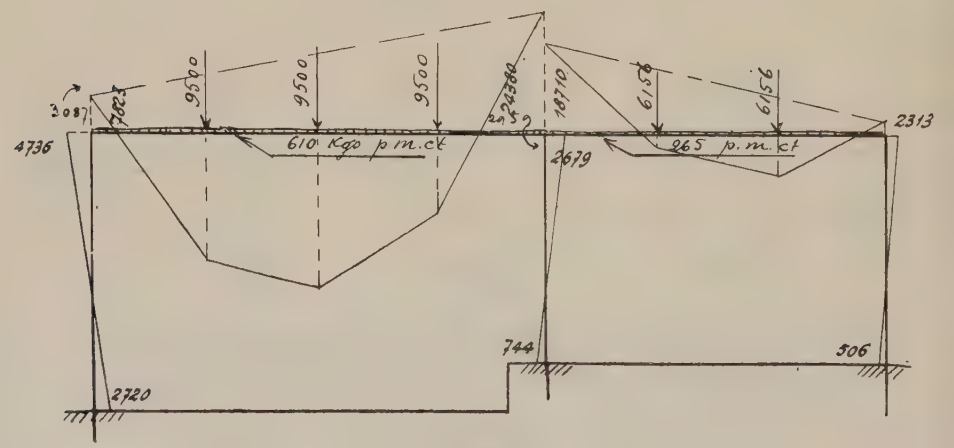


Fig. 254.

La figure 251 juxtaposée à cette dernière nous donne les moments cherchés, c'est-à-dire (fig. 255) :

$$M_1 = -2.720$$
$$M_{2-1} = 4.736$$
$$M_{2-5} = 7.823$$
$$M_{2-3} = 3.087$$
$$M_3 = 3.874$$

$$M_4 = 3.999$$
$$M_{5-4} = -2.959$$
$$M_{5-6} = 2.679$$
$$M_6 = -744$$
$$M_{5-7} = 18.710$$
$$M_7 = 2.813$$
$$M_8 = -452$$

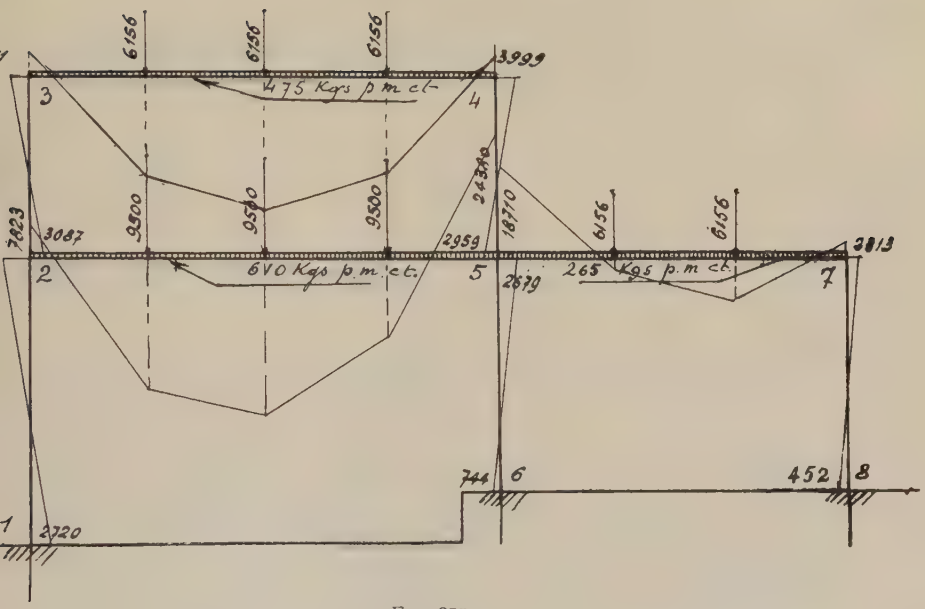


Fig. 255.

II. — MÉTHODE DES APPUIS AUXILIAIRES

Plaçons en 2, 3, 4, 5, 7 des appuis auxiliaires et cherchons les coefficients de proportionnalité des séries de gauche et de droite par approximations successives (fig. 256).

Coefficients de proportionnalité (fig. 257).

Première approximation :

$$\rho_{1-2} = 0,500$$

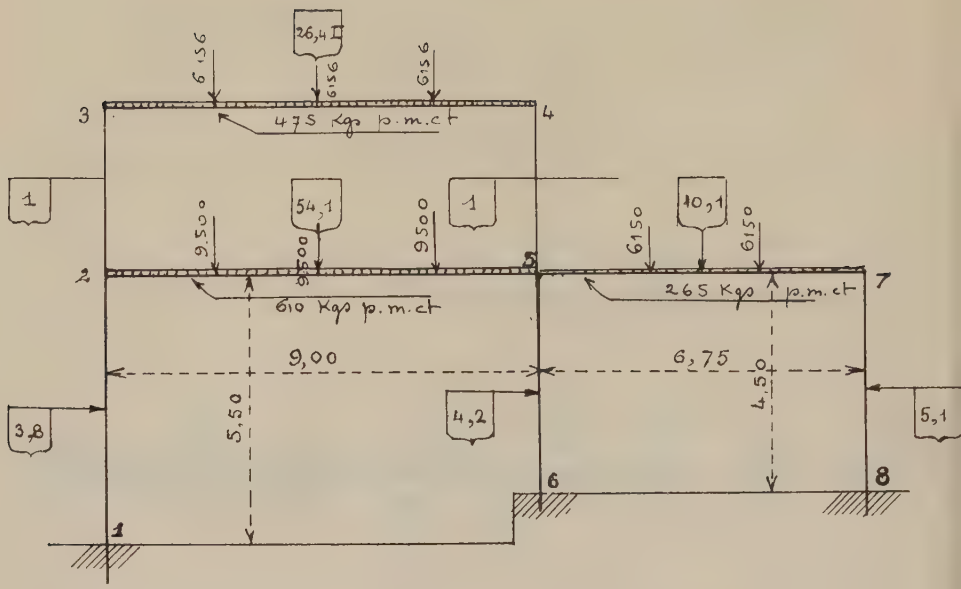


Fig. 256.

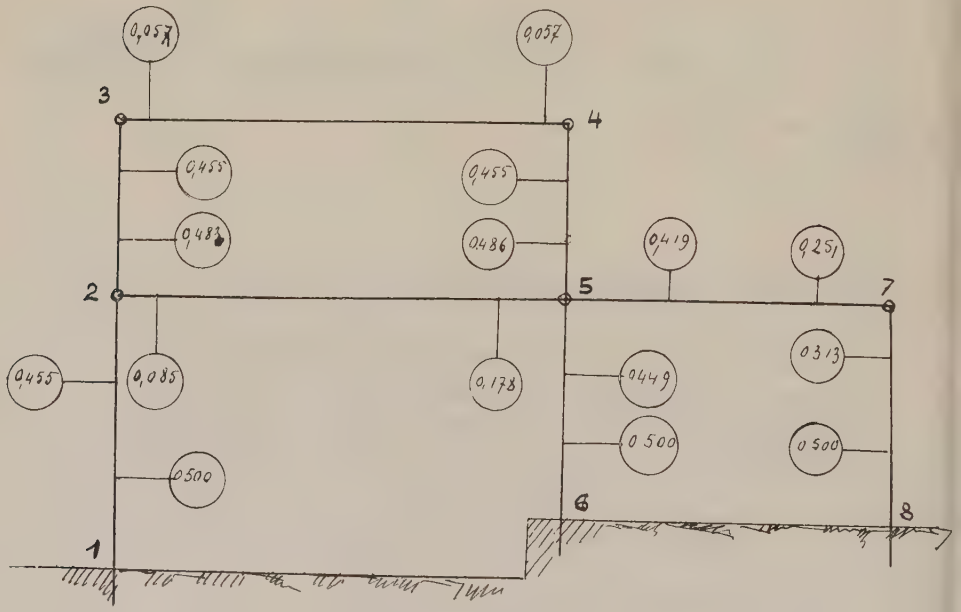


Fig. 257.

Pour ρ_{2-3}, appliquons la formule n° 6 du § 74 :

$$\rho_{2-3} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{3,5}{1}\left[\dfrac{3,8}{5,5\,(2-0,5)} + \dfrac{54,1}{9\,(2-0,25)}\right]}} = 0,483$$

$$\rho_{2-5} = \frac{1}{2 + \dfrac{9}{54,1}\left[\dfrac{1}{3,5 \times 1,75} + \dfrac{3,8}{5,5 \times 1,5}\right]} = 0,085.$$

Pour ρ_{3-4}, appliquons la formule n° 5 du § 73 :

$$\rho_{3-4} = \frac{1}{2 + (2 - 0,483)\,\dfrac{3,5 \times 26,4}{9}} = 0,057$$

$$\rho_{4-5} = \frac{1}{2 + (2 - 0,057)\,\dfrac{9}{3,5 \times 26,4}} = 0,455.$$

Pour ρ_{5-2} et suivants autour de 5, appliquons la formule générale n° 6 du § 74 :

$$\rho_{5-2} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{9}{54,1}\left[\dfrac{1}{3,5\,(2-0,455)} + \dfrac{10,1}{6,75\,(2-0,250)} + \dfrac{4,2}{4,5\,(2-0,5)}\right]}} = 0,1780$$

$$\rho_{5-6} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{4,50}{4,20}\left[\dfrac{1}{3,5\,(2-0,455)} + \dfrac{54,1}{9\,(2-0,085)} + \dfrac{10,1}{6,75\,(2-8,250)}\right]}} = 0,449$$

$$\rho_{5-7} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{6,75}{10,1}\left[\dfrac{1}{3,5\,(2-0,455)} + \dfrac{54,1}{9\,(2-0,085)} + \dfrac{4,2}{4,5\,(2-0,5)}\right]}} = 0,419$$

$$\rho_{5-4} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{3,5\left[\dfrac{54,1}{9\,(2-0,085)} + \dfrac{4,2}{4,5\,(2-0,5)} + \dfrac{10,1}{6,75\,(2-0,25)}\right]}} = 0,486$$

Continuons en employant les mêmes formules :

$$\rho_{7-8} = \frac{1}{2 + (2 - 0,419) \times \dfrac{6,75 \times 5,1}{4,5 \times 10,1}} = 0,313$$

$$\rho_{7-5} = \frac{1}{2 + (2 - 0{,}5) \times \dfrac{4{,}5 \times 10{,}1}{6{,}75 \times 5{,}1}} = 0{,}251$$

$$\rho_{4-3} = \frac{1}{2 + (2 - 0{,}486) \times \dfrac{3{,}5 \times 26{,}4}{9}} = 0{,}057$$

$$\rho_{3-2} = \frac{1}{2 + \dfrac{(2 - 0{,}057) \times 9}{3{,}5 \times 26{,}4}} = 0{,}455$$

$$\rho_{2-1} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{5{,}5}{3{,}8}\left[\dfrac{1}{3{,}5\,(2 - 0{,}455)} + \dfrac{54{,}1}{9\,(2 - 0{,}178)}\right]}} = 0{,}455.$$

Deuxième approximation (fig. 258). — Avec les va-

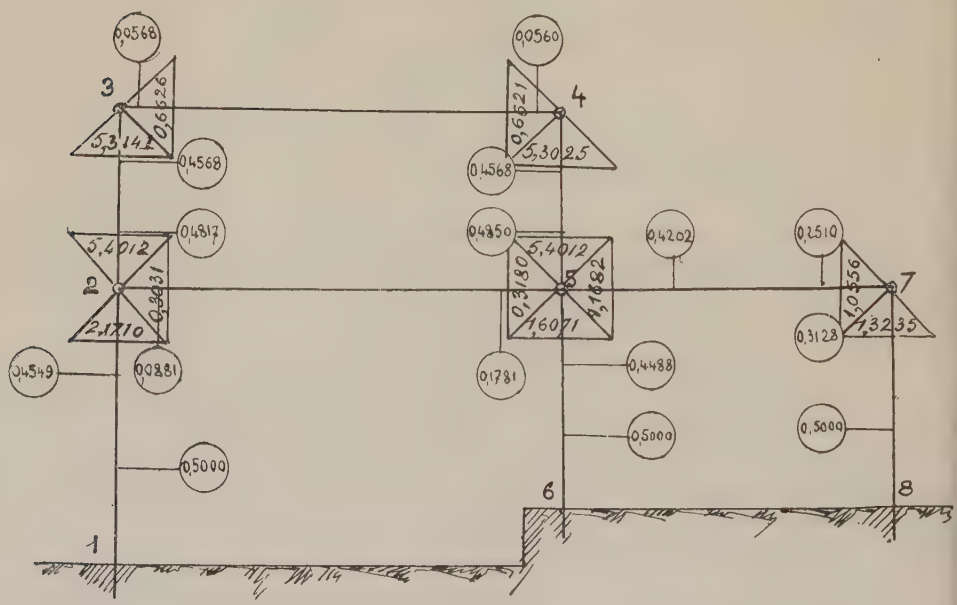


Fig. 258.

leurs approchées ainsi trouvées, recommençons les déterminations des coefficients de proportionnalité :

$$\rho_{2-3} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{3{,}5}{1}\left[\dfrac{3{,}8}{5{,}5\,(2 - 0{,}5)} + \dfrac{54{,}1}{9\,(2 - 0{,}178)}\right]}} = 0{,}4817$$

$$\rho_{2-5} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{9}{54,1}\left[\dfrac{1}{3,5\,(2-0,5)} + \dfrac{3,8}{5,5\,(2-0,5)}\right]}} = 0,0881$$

$$\rho_{3-4} = \frac{1}{2 + (2-0,4817)\,\dfrac{3,5 \times 26,4}{9}} = 0,0568$$

$$\rho_{4-5} = \frac{1}{2 - \dfrac{(2-0,0568) \times 9}{3,5 \times 26,4}} = 0,4568.$$

Pour les coefficients voisins de 5, nous avons intérêt à calculer :

$$\frac{1}{3,5\,(2-0,4568)} = 0,1851$$

$$\frac{54,1}{9\,(2-0,0881)} = 3,1440$$

$$\frac{4,2}{4,5\,(2-0,500)} = 0,6222$$

$$\frac{10,1}{6,75\,(2-0,2510)} = 0,8555$$

$$\rho_{5-2} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{9}{54,1}\left[\dfrac{1}{3,5\,(2-0,4568)} + \dfrac{10,1}{6,75\,(2-0,251)} + \dfrac{4,2}{4,5\,(2-0,5)}\right]}} = 0,1781$$

$$\rho_{5-6} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{4,5}{4,2}\left[\dfrac{1}{3.5\,(2-0,4568)} + \dfrac{54,1}{9\,(2-0,0881)} + \dfrac{10,1}{6,75\,(2-0,05)}\right]}} = 0,4498$$

$$\rho_{5-7} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{6,75}{10,1}\left[\dfrac{1}{3,5\,(2-0,4568)} + \dfrac{54,1}{9\,(2-0,0881)} + \dfrac{4,2}{4,5\,(2-0,5)}\right]}} = 0,4204$$

$$\rho_{5-4} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{3,5\left[\dfrac{54,1}{9(2-0,0881)} + \dfrac{4,2}{4,5\,(2-0,5)} + \dfrac{10,1}{6,75\,(2-0,2510)}\right]}} = 0,4850$$

$$\rho_{7-8} = \frac{1}{2\,(2-0,4204)\,\dfrac{6,75 \times 5,1}{4,5 \times 10,1}} = \frac{1}{3,1975} = 0,3128,$$

$$\rho_{4-3} = \frac{1}{2\,(2-0,4204)\,\dfrac{3,5 \times 26,4}{9}} = 0,0560.$$

$$\rho_{3-2} = \frac{1}{2 - \frac{(2-0,56)\,9}{3,5 \times 26,4}} = 0,4568,$$

$$\rho_{2-1} = \frac{1}{2 + \frac{5,5}{3,8}\left[\frac{1}{3,5\,(2-0,4568)} + \frac{54,1}{9\,(2-0,1781)}\right]} = 0,4549.$$

Coefficients de répartition (fig. 258).

Nœud 2.

Branche 2-1 : $\frac{(2-0,5)5,5}{3,8} = 2,1740.$

— 2-5 : $\frac{(2-0,1781)9}{54,1} = 0,3031.$

— 2-3 : $\frac{(2-0,4568)}{1}\,3,5 = 5,4012.$

Nœud 3.

Branche 3-2 : $\frac{(2-0,4817)}{1}\,3,5 = 5,3141.$

— 3-4 : $\frac{(2-0,0560)9}{26,4} = 0,6626.$

Nœud 4.

Branche 4-3 : $\frac{(2-0,0568)9}{26,4} = 0,6621.$

— 4-5 : $\frac{(2-0,4850)}{1}\,3,5 = 5,3025.$

Nœud 5.

Branche 5-4 : $\frac{(2-0,4568)}{1}\,3,5 = 5,4012.$

— 5-2 : $\frac{(2-0,0881)9}{54,1} = 0,3180.$

— 5-6 : $\frac{(2-0,5)}{4,2}\,4,5 = 1,6071.$

6-7 : $\frac{(2-0,251)}{10,1}\,6,75 = 1,1688.$

Nœud 7.

Branche 7-5 : $\frac{(2-0,4204)}{10,1}\,6,75 = 1,0556.$

— 7-8 : $\frac{(2-0,5)}{3,1}\,4,5 = 1,3235.$

Répartition autour des nœuds d'un moment m.

1° *Nœud 2 :*

a) m_{2-3} donné (fig. 259-260) :

$$0{,}3031\,x = 2{,}1710\,y,$$
$$x = \frac{2{,}1710}{0{,}3031} = 7{,}1626\,y,$$
$$y + 7{,}1626\,y = m,$$
$$y = \frac{m}{8{,}1626} = 0{,}1225\,m,$$
$$x = m - 0{,}1225\,m = 0{,}8775\,m;$$

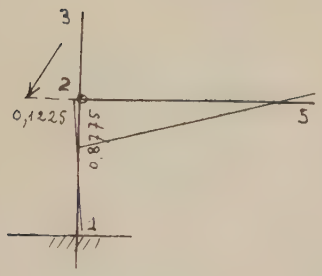


Fig. 259.

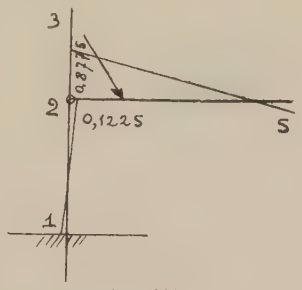


Fig. 260.

b) m_{2-1} donné (fig. 261-262) :

$$0{,}3031\,x = 5{,}4012\,y,$$
$$x = \frac{5{,}4012}{0{,}3031}\,y = 17{,}8198\,y,$$
$$y + 17{,}8198\,y = m,$$
$$y = \frac{m}{18{,}8198} = 0{,}0531,$$
$$x = m - 0{,}0531\,m = 0{,}9469\,m.$$

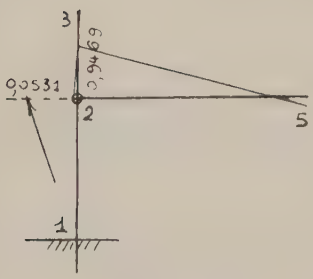


Fig. 261.

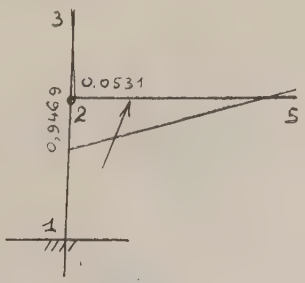


Fig. 262.

c) m_{2-5} donné (fig. 263-264) :

$$2{,}171\,x = 5{,}4012\,y,$$
$$x = \frac{5{,}40122}{2{,}171}\,y = 1{,}4878\,y,$$
$$m = y + 2{,}4878\,y,$$
$$y = \frac{m}{3{,}4878} = 0{,}2867.$$
$$x = m - 0{,}2867\,m = 0{,}7133\,m.$$

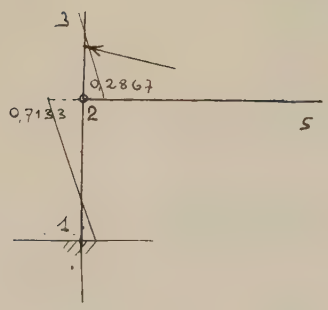


Fig. 263.

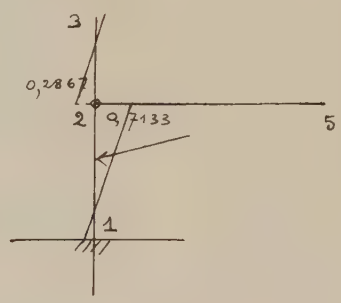


Fig. 264.

2° *Nœud 5 :*

a) m_{5-6} donné (fig. 265-266) :

$$0{,}318\,x = 5{,}4012\,y = 1{,}1682\,z$$
$$y = \frac{5{,}4012\,x}{0{,}318} = 0{,}0558\,x,$$
$$z = \frac{0{,}318\,x}{1{,}1688} = 0{,}2721\,x,$$
$$m = x + 0{,}0588\,x + 0{,}2721\,x = 1{,}3309\,x,$$
$$x = \frac{m}{1{,}3309} = 0{,}7514\,m.$$
$$y = 0{,}7514 \times 0{,}0558 = 0{,}0442\,m,$$
$$z = 0{,}2721 \times 0{,}0558 = 0{,}2044\,m;$$

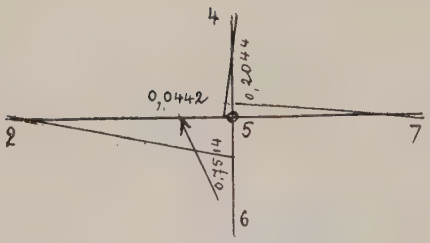


Fig. 265.

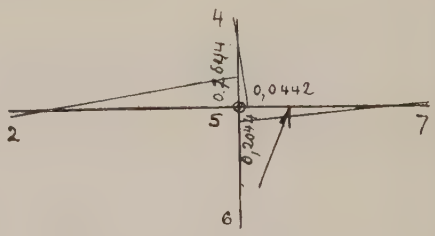


Fig. 266.

b) m_{5-4} donné (fig. 267-268) :

$$1,6071\,x = 0,318\,y = 1,1688\,z,$$
$$y = \frac{1,6071\,x}{0,3180} = 5,0534x,$$
$$z = \frac{1,6071\,x}{1,1683} = 1,3747$$
$$x + 5,0534x + 1,3747\,x = m,$$
$$x = \frac{m}{7,4281} = 0,1346\,m,$$
$$y = 5,0534 \times 0,1346\,m = 0,6802\,m,$$
$$z = 1,3747 \times 0,1346\,m = 0,1850\,m;$$

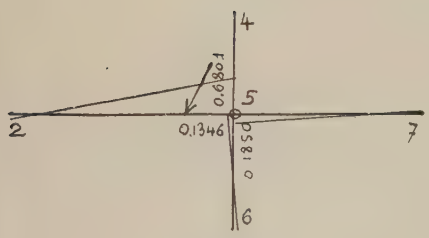


Fig. 267.

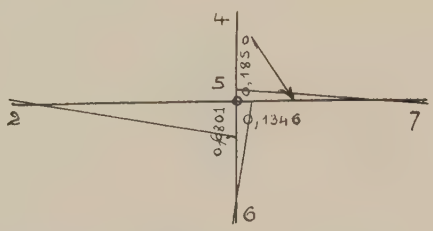


Fig. 268.

c) m_{5-2} donné (fig. 269-270) :

$$5,4012\,x = 1,1688\,y = 1,6071\,z$$
$$y = \frac{5,4012\,x}{1,1688} = 4,6211\,x,$$
$$z = \frac{5,4012}{1,6071} = 3.3608,$$
$$x + 4,6211\,x + 3,3608\,x = m,$$
$$x = \frac{m}{8,9819} = 0,1113\,m,$$
$$y = 4,6211 \times 0,1113\,m = 0,5145\,m,$$
$$z = 3,3608 \times 0,1113\,m = 0,3742\,m;$$

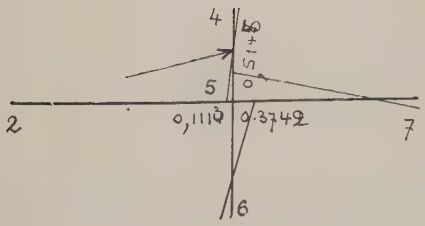


Fig. 269.

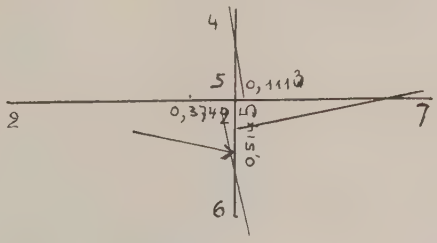


Fig. 270.

d) m_{5-7} donné (fig. 271-272) :

$$5,4012x = 1,6071y = 3,180z,$$

$$y = \frac{5,4012x}{1,6071} = 3,3608x,$$

$$z = \frac{5,4012x}{0,3180} = 16,9842x,$$

$$x + 3,3608x + 16,9842x = m,$$

$$x = \frac{m}{21,3450} = 0,0468m,$$

$$y = 3,3608 \times 0,0468m = 0,1573m,$$
$$z = 16,9842 \times 0,0468m = 0,7959m.$$

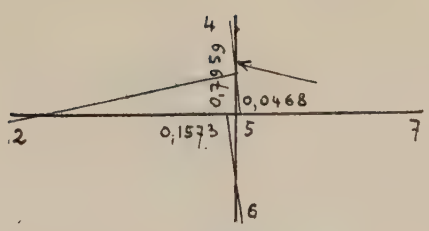


Fig. 271.

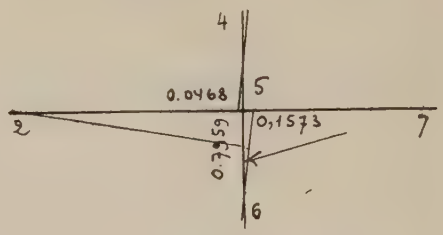


Fig. 272.

Moments incidents aux appuis auxiliaires.

Pour employer la méthode des appuis auxiliaires, il suffit de connaître les moments provoqués par un moment incident en chacun des appuis auxiliaires, appliqués en fait aux œillets respectifs de ceux-ci.

Donnons les calculs pour un appui à deux branches, un à trois branches, et enfin un à quatre branches.

Moment μ *appliqué à l'appui* 3 (fig. 273).

A l'aide des coefficients de répartition, nous avons :

$$0,6626x = 5,3141y;$$

d'où :

$$x = \frac{5,3141}{0,6626} = 8,0201y,$$

comme $x + y = \mu$, on a :

$$9,0201y = \mu;$$

$$y = 0,1108\mu \quad \text{et} \quad x = \mu - 0,1108 = 0,8892\mu.$$

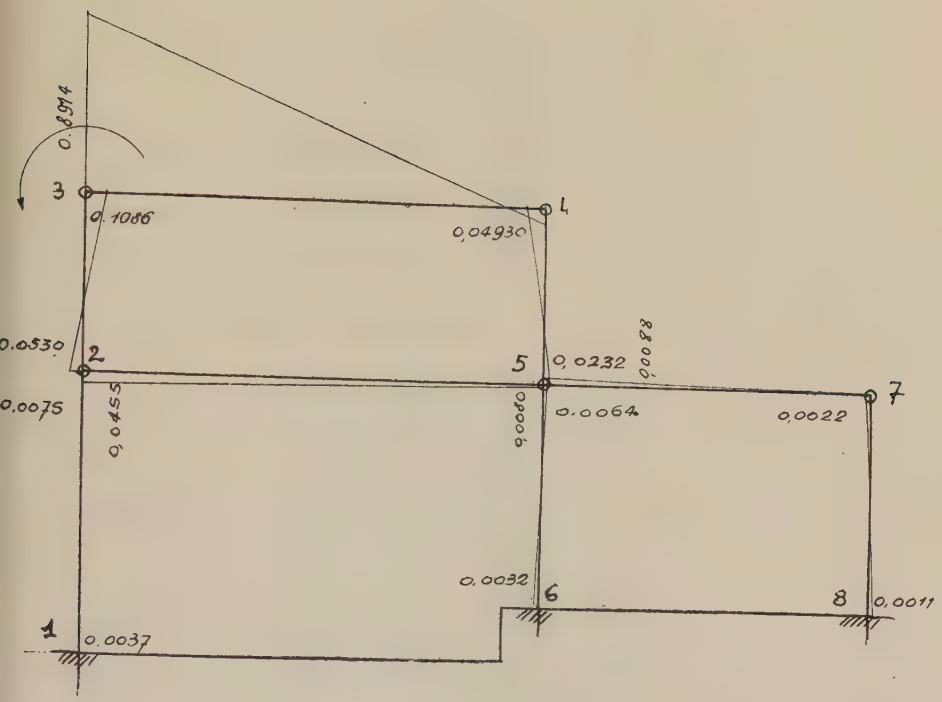


Fig. 273.

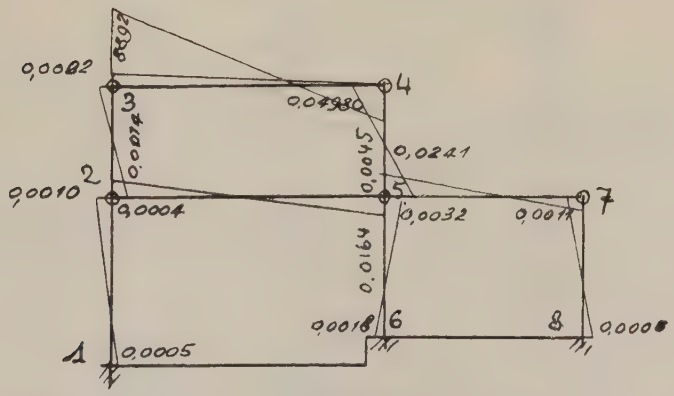


Fig. 274.

Répartissons d'abord 0,8892 μ (fig. 274) :

$$M_4 - = 0,8892 \times 0,0560 = 0,0498\,\mu,$$
$$M_{5-4} = 0,0498 \times 0,485 = 0,0241$$

$$M_{5-7} = 0{,}0241 \times 0{,}1850 = 0{,}0045\,\mu$$
$$M_7 = 0{,}0045 \times 0{,}2510 = 0{,}0011$$
$$M_8 = 0{,}0011 \times 0{,}5000 = 0{,}0005$$
$$M_{5-6} = 0{,}1346 \times 0{,}0241 = 0{,}0032$$
$$M_6 = 0{,}0036 \times 0{,}5000 = 0{,}0016$$
$$M_{5-2} = [0{,}0241 - (0{,}0045 + 0{,}0032)]\,\mu = 0{,}0164\,\mu$$
$$M_{2-5} = 0{,}0164 \times 0{,}0881 = 0{,}0014$$
$$M_{2-1} = 0{,}0014 \times 0{,}7133 = 0{,}0010$$
$$M_1 = 0{,}0010 \times 0{,}5000 = 0{,}0005$$
$$M_{2-3} = 0{,}0014 \times 0{,}0010 = 0{,}0004$$
$$M_3 = 0{,}0004 \times 0{,}5000 = 0{,}0002$$

Ensuite, 0,1108 μ, et nous obtenons (fig. 275) :

$$M_{2-3} = 0{,}1108 \times 0{,}4817 = 0{,}0534\,\mu$$
$$M_{2-1} = 0{,}0534 \times 0{,}1225 = 0{,}0065$$
$$M_1 = 0{,}0065 \times 0{,}5000 = 0{,}0032$$
$$M_{2-5} = 0{,}0534 - 0{,}0065 = 0{,}0469$$
$$M_{5-2} = 0{,}0469 \times 0{,}1781 = 0{,}0084$$
$$M_{5-4} = 0{,}0084 \times 0{,}1113 = 0{,}0009$$
$$M_4 = 0{,}0009 \times 0{,}4568 = 0{,}0005$$
$$M_{5-7} = 0{,}0084 \times 0{,}5145 = 0{,}0043$$
$$M_{5-6} = [0{,}0084 - (0{,}0009 + 0{,}0043)]\,\mu = 0{,}0032\,\mu$$
$$M_6 = 0{,}0032 \times 0{,}5000 = 0{,}0016\,\mu$$
$$M_7 = 0{,}0043 \times 0{,}2510 = 0{,}0011$$
$$M_8 = 0{,}0011 \times 0{,}5000 = 0{,}0005$$

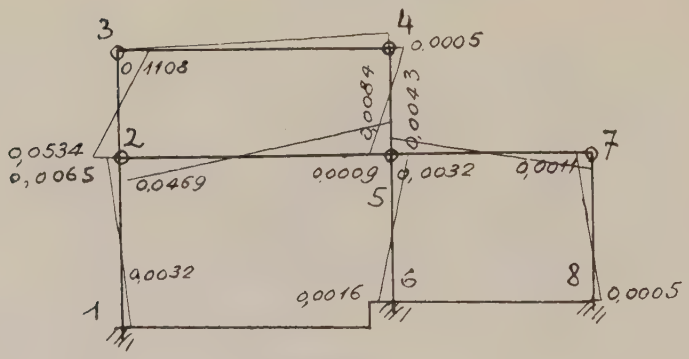


Fig. 275.

En additionnant les moments correspondants des deux figures 274 et 275 :

$$M_1 = -0{,}0037\,\mu$$
$$M_{2-1} = 0{,}0075$$
$$M_{2-5} = -0{,}0455$$

$$M_{2-3} = 0{,}0530\,\mu$$
$$M_{3-2} = -0{,}1086$$
$$M_{3-4} = 0{,}8914$$
$$M_{4} = -0{,}0493$$
$$M_{5-4} = 0{,}0232$$
$$M_{5-2} = -0{,}0080$$
$$M_{5-6} = 0{,}0064$$
$$M_{6} = -0{,}0032$$
$$M_{5-7} = 0{,}0088$$
$$M_{7} = 0{,}0022$$
$$M_{8} = 0{,}0014 \text{ (fig. 273).}$$

Moment incident appliqué en 2 (fig. 276).

Utilisons les coefficients de répartition autour du nœud 2, nous avons :

$$0{,}3031\,x = 5{,}4012\,y = 2{,}1710\,z,$$

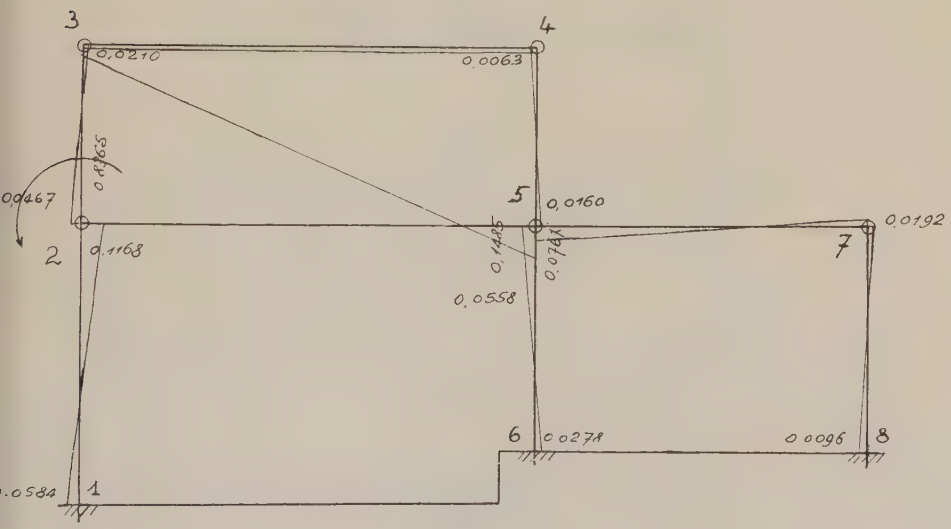


Fig. 276.

d'où :

$$x = \frac{5{,}4012}{0{,}3031}\,y = 17{,}8192\,y$$
$$z = \frac{5{,}4012}{2{,}1710}\,y = 2{,}4879\,y;$$

mais comme :

$$x + y + z = \mu,$$

on a :

$$17{,}8192y + 2{,}4879y + y = \mu,$$

c'est-à-dire :

$$21{,}3071y = \mu$$

et :

$$y = \frac{\mu}{21{,}3071} = 0{,}04693\mu,$$

d'où :

$$x = 17{,}8192 \times 0{,}04693 = 0{,}8365\mu$$
$$z = 2{,}4879 \times 0{,}04693 = 0{,}1168\mu.$$

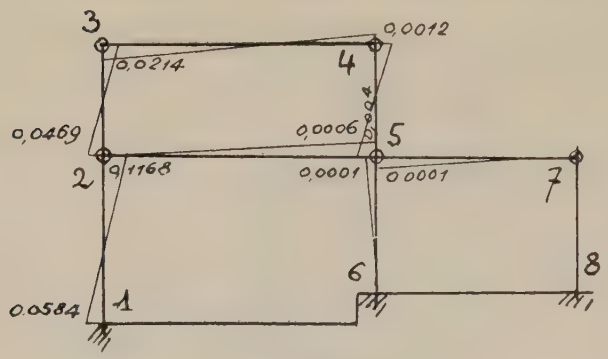


Fig. 277.

Connaissant les coefficients de proportionnalité et de

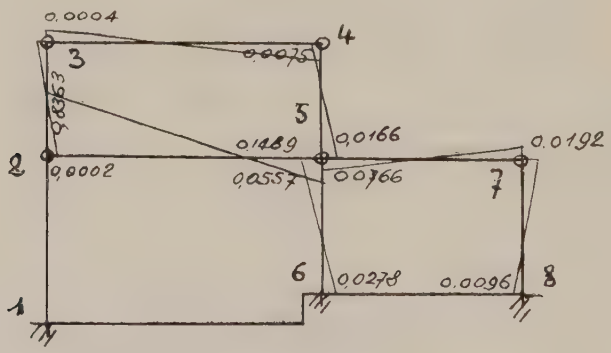


Fig. 278.

répartition autour des nœuds, on obtient (fig. 277 et 278) :

puis :

$M_1 = 0{,}1168 \times 0{,}5000 = 0{,}0584$
$M_3 = 0{,}0469 \times 0{,}4568 = 0{,}0214$
$M_4 = 0{,}0214 \times 0{,}0560 = 0{,}0012$
$M_5 = 0{,}0012 \times 0{,}4850 = 0{,}0006$
$M_{5-2} = 0{,}0006 \times 0{,}6801 = 0{,}0004$
$M_{5-6} = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}0001$
$M_{5-7} = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}0001$

$M_{5-2} = 0{,}8363 \times 0{,}1781 = 0{,}1489$
$M_{5-4} = 0{,}1489 \times 0{,}1113 = 0{,}0166$
$M_{5-6} = 0{,}1489 \times 0{,}3742 = 0{,}0557$
$M_{5-7} = 0{,}1489 \times 0{,}5145 = 0{,}0766$
$M_6 = 0{,}0557 \times 0{,}5000 = 0{,}0278$
$M_7 = 0{,}0766 \times 0{,}251\,) = 0{,}0192$
$M_8 = 0{,}0192 \times 0{,}5000 = 0{,}0096$
$M_4 = 0{,}0166 \times 0{,}4568 = 0{,}0075$
$M_3 = 0{,}0075 \times 0{,}0568 = 0{,}0004$
$M_2 = 0{,}0004 \times 0{,}4817 = 0{,}0002$

En additionnant les moments correspondants de ces deux figures, on a le résultat (fig. 276) :

$M_1 = 0{,}0584\mu$
$M_{2-4} = -0{,}1168$
$M_{2-5} = 8{,}0365$
$M_{2-3} = 0{,}0467$
$M_3 = -0{,}0210$
$M_4 = -0{,}0063$
$M_{5-4} = 0{,}0160$

$M_{5-2} = -0{,}1485\mu$
$M_{5-6} = -0{,}0558$
$M_6 = 0{,}0278$
$M_{5-7} = -0{,}0767$
$M_7 = 0{,}0192$
$M_8 = -0{,}0096$
consignés sur la figure 276.

Moment incident μ *appliqué en* 5 (fig. 279).

Employons les coefficients de répartition autour du nœud 5 et écrivons :

$$0{,}3180\,x = 5{,}4012\,y = 1{,}1682\,z = 1{,}6071\,t$$
$$x + y + z + t = \mu$$

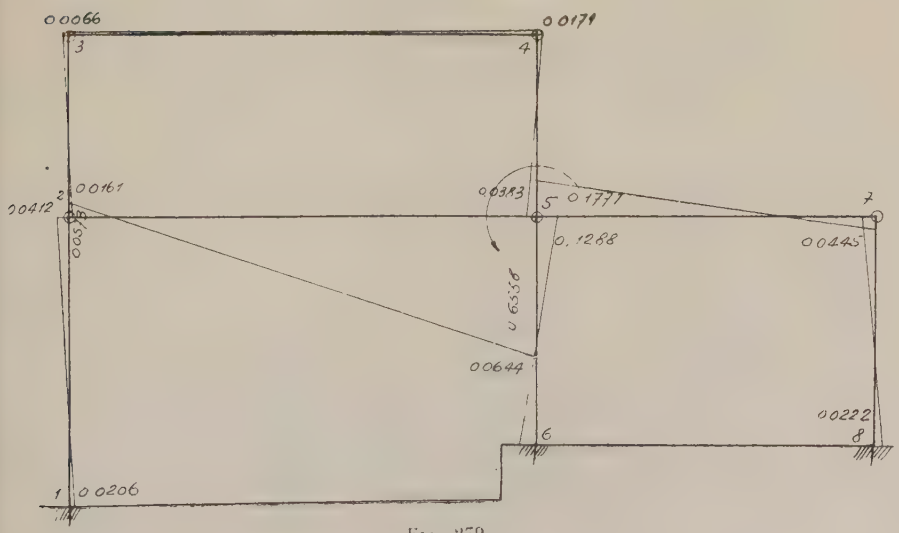


Fig. 279.

d'où :

$$x = \frac{5,4012}{0,3180} y = 16,9849 y$$
$$z = \frac{5,4012}{1,1682} y = 4,6235 y$$
$$t = \frac{5,4012}{1,1682} y = 3,3608 y$$

et :

$$16,9849 y + 4,6235 y + 3,3608 y + y = 25,9692 y = \mu$$

d'où :

$$y = \frac{\mu}{25,9692} = 0,03831 \mu,$$

et enfin :

$$x = 16,9849 \times 0,03831 \mu = 0,6558 \mu$$
$$y = 4,6235 \times 0,03831 \mu = 0,1771 \mu$$
$$z = 3,3608 \times 0,03831 \mu = 0,1288 \mu,$$

d'où :

$$M_6 = 0,1288 \times 0,5000 = 0,0644 \mu$$
$$M_7 = 0,1771 \times 0,2510 = 0,0445$$
$$M_8 = 0,0445 \times 0,5000 = 0,0222$$
$$M_4 = 0,0383 \times 0,4568 = 0,0175 \qquad \text{(fig. 280)}$$
$$M_5 = 0,0175 \times 0,0568 = 0,0010$$
$$M_2 = 0,0010 \times 0,4817 = 0,0005$$
$$M_{2-5} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,0005$$

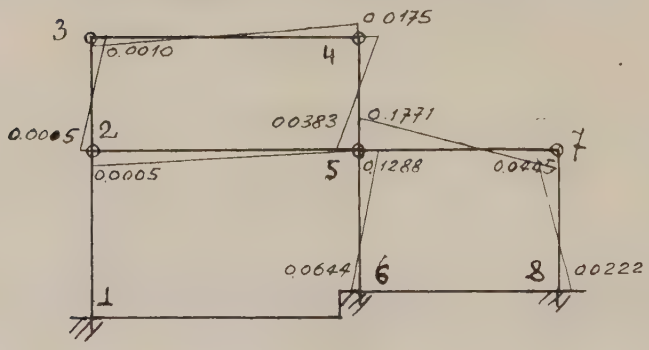


Fig. 280.

Pour 0,6558 μ, nous avons :

$$M_{2-5} = 0,6558 \times 0,0881 = 0,0578 \mu$$
$$M_{2-3} = 0,0578 \times 0,2867 = 0,0166$$
$$M_{2-1} = 0,0578 \times 0,7133 = 0,0412 \qquad \text{(fig. 281)}$$
$$M_1 = 0,0412 \times 0,5000 = 0,0206$$
$$M_3 = 0,0166 \times 0,4568 = 0,0076$$
$$M_4 = 0,0076 \times 0,0560 = 0,0004.$$

En ajoutant les moments correspondants de ces figures, l'on a :

$M_1 = -0{,}0206\,\mu$
$M_{2-1} = 0{,}0412$
$M_{2-5} = -0{,}0573$
$M_{2-3} = -0{,}0161$
$M_3 = 0{,}0066$
$M_4 = 0{,}0171$

$M_{5-4} = -0{,}0383\,\mu$
$M_{5-2} = -0{,}6658$
$M_{5-6} = 0{,}1288$
$M_6 = 0{,}0644$ (fig. 279)
$M_{5-7} = 0{,}1771$
$M_7 = -0{,}0445$
$M_8 = 0{,}0222.$

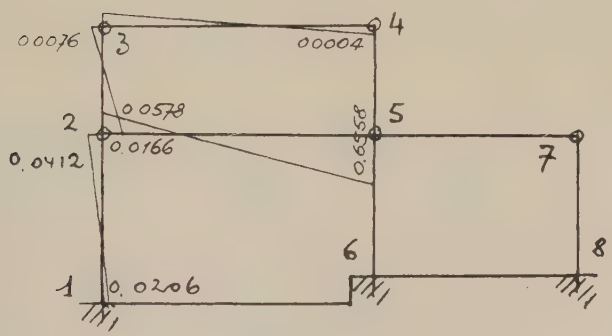


Fig. 281.

En procédant de même pour les moments incidents en 4 et 7, on a obtenu les résultats suivants. Pour le moment incident en 4 :

$M_1 = 0{,}0026\,\mu$
$M_{2-1} = -0{,}0052$
$M_{2-5} = 0{,}0184$
$M_{2-3} = -0{,}0052$
$M_3 = 0{,}0511$
$M_{4-3} = -0{,}8892$
$M_{4-5} = 0{,}1108$ (fig. 282)
$M_{5-2} = 0{,}0330$
$M_{5-6} = -0{,}0086$
$M_6 = 0{,}0043$
$M_{5-7} = -0{,}0119$
$M_7 = 0{,}0030$
$M_8 = -0{,}0015$

Moment incident en 7 (fig. 283) :

$M_1 = 0{,}0058\,\mu$
$M_{2-1} = -0{,}0117$

$M_{5-2} = 0{,}1861\,\mu$
$M_{5-6} = -0{,}0368$

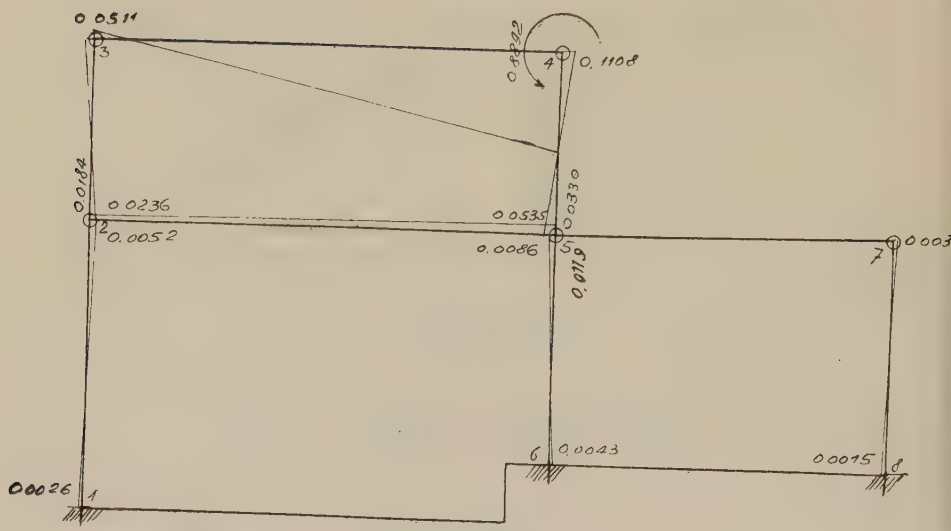


Fig. 282.

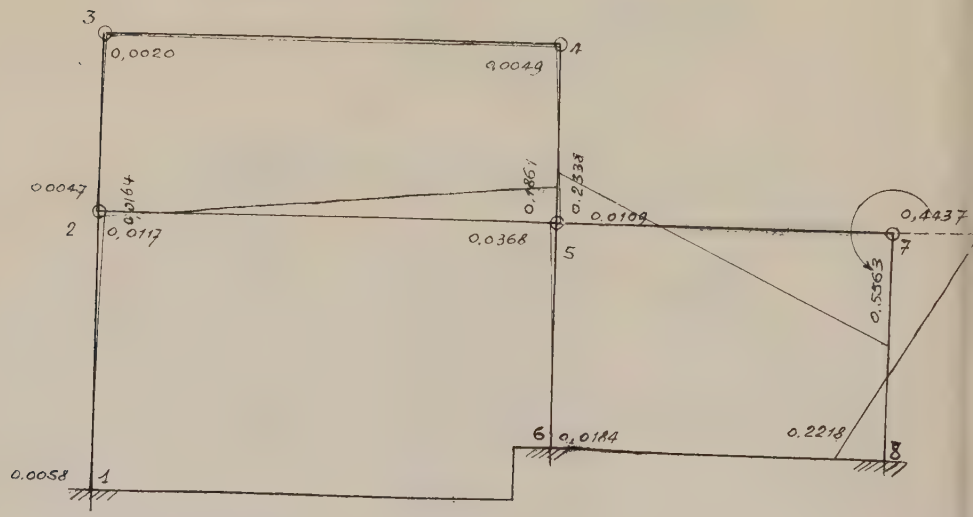


Fig. 283.

$M_{2-5} = -0{,}0164\,\mu$		$M_6 = 0{,}0184\,\mu$	
$M_{2-3} = 0{,}0047$		$M_{5-7} = 0{,}2338$	
$M_3 = -0{,}0020$		$M_{7-5} = -0{,}5563$	
$M_4 = -0{,}0049$		$M_{7-8} = 0{,}4437$	
$M_{5-4} = 0{,}0109$		$M_8 = -0{,}2218$	

Moments de flexion dus a des forces F_1 et F_2 horizontales appliquées en 2 et 3 (fig. 284).

Envisageons la déformation totale de la figure 284

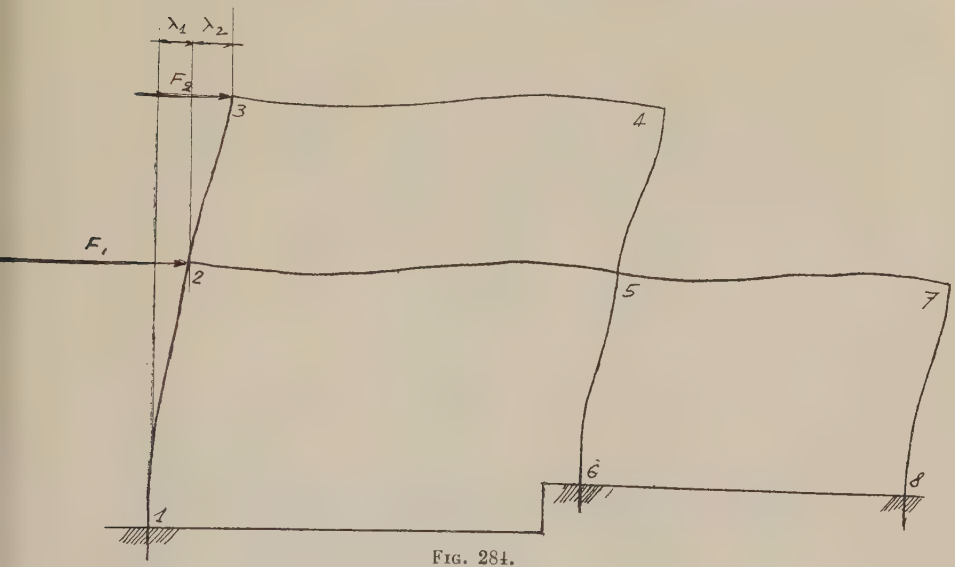


Fig. 284.

comme la conséquence de deux déformations représentées

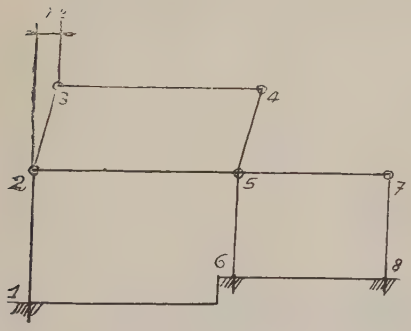


Fig. 285.

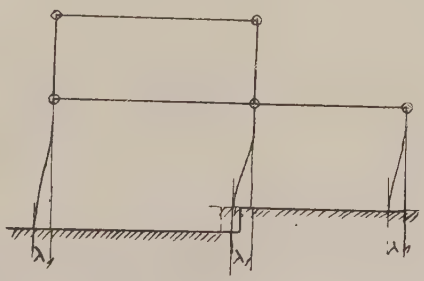


Fig. 286.

par les figures 285 et 286 d'une construction à appuis auxiliaires, dont pour la première la traverse 3-4 est dé-

placée vers la droite d'une longueur λ_2 et, pour la deuxième, la même construction a tous ses appuis déplacés vers la gauche d'une longueur λ_1 (fig. 286).

La connaissance des moments provoqués par les divers moments incidents établis préalablement nous donne la solution rapide de ce problème.

La déformation de la figure 285 peut, en effet, être regardée comme le résultat de deux autres :

1° Les appuis auxiliaires 2, 3, 4, 5 remplacés par des encastrements auxiliaires et le déplacement relatif de 3 par rapport à 2, et de 4 par rapport à 5 est λ_2, les moments d'encastrements correspondants étant m (fig. 287);

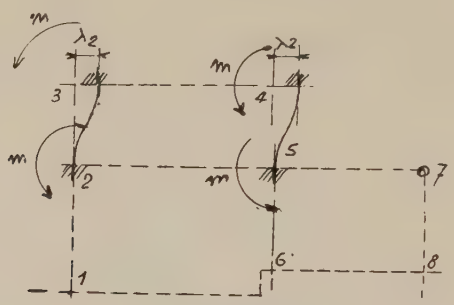


Fig. 287.

2° Sur la construction pourvue d'appuis auxiliaires sont appliqués respectivement en 2, 3, 4, 5 des moments $-m$ (fig. 288).

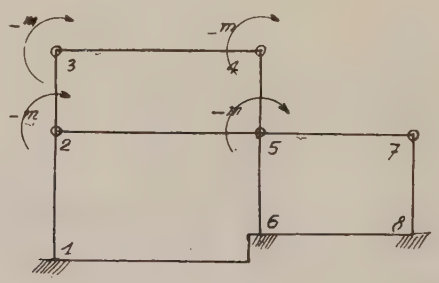


Fig. 288.

La déformation de la figure 286 sera regardée comme le résultat des déformations successives suivantes :

La construction primitive a ses appuis auxiliaires 2, 5 et 7 remplacés par des encastrements auxiliaires, 1 est amené en 1′ et tel que la distance $1 - 1' = \lambda_1$, de même 6 en 6′ pour $6 - 6' = \lambda_1$, et enfin 8 en 8′, tel que $8 - 8' = \lambda_1$ (fig. 289).

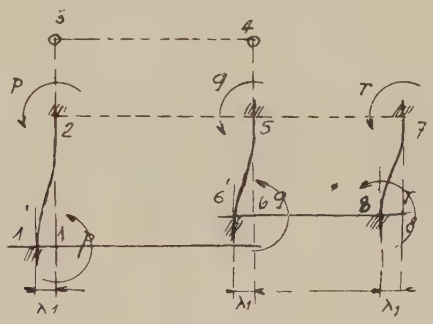


Fig. 289.

On calcule en fonction de p les moments d'encastrement q et v.

Puis, sur la construction prise à appuis auxiliaires, on applique respectivement en 2, 5 et 7 les moments incidents, $-p$, $-q$, $-v$ (fig. 290).

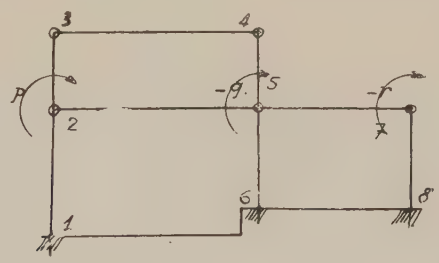


Fig. 290.

Remarque importante. — Par ce mode de calcul, les déplacements λ_1 et λ_2 n'ont pas besoin d'être calculés, ainsi qu'on s'en rend compte par ce qui va suivre.

a) *Moments en* m.

Il nous suffit d'ajouter respectivement les moments calculés déjà et figurant aux dessins 273-276, 279, 282 et de

les changer de signes, ce qui est consigné sur la figure 291

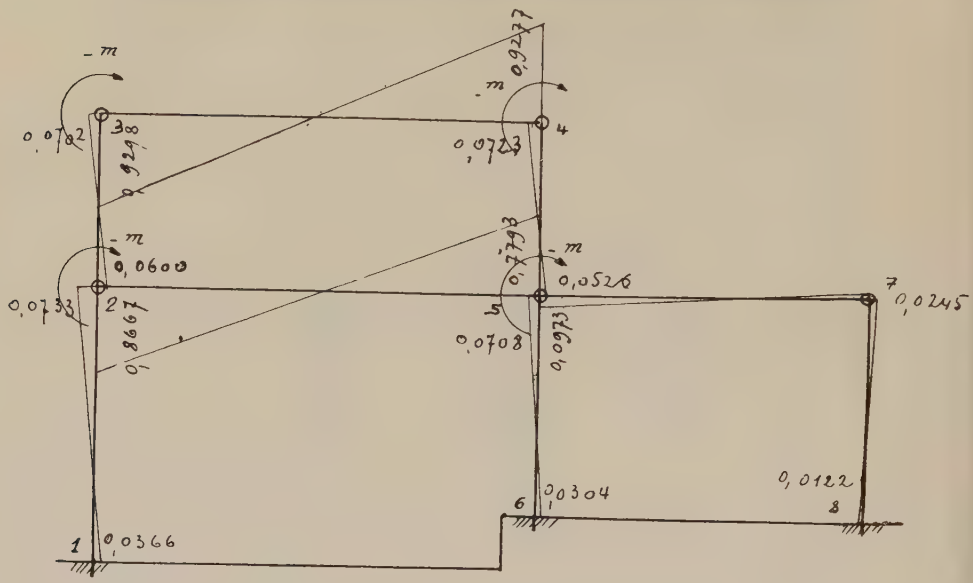


Fig. 291.

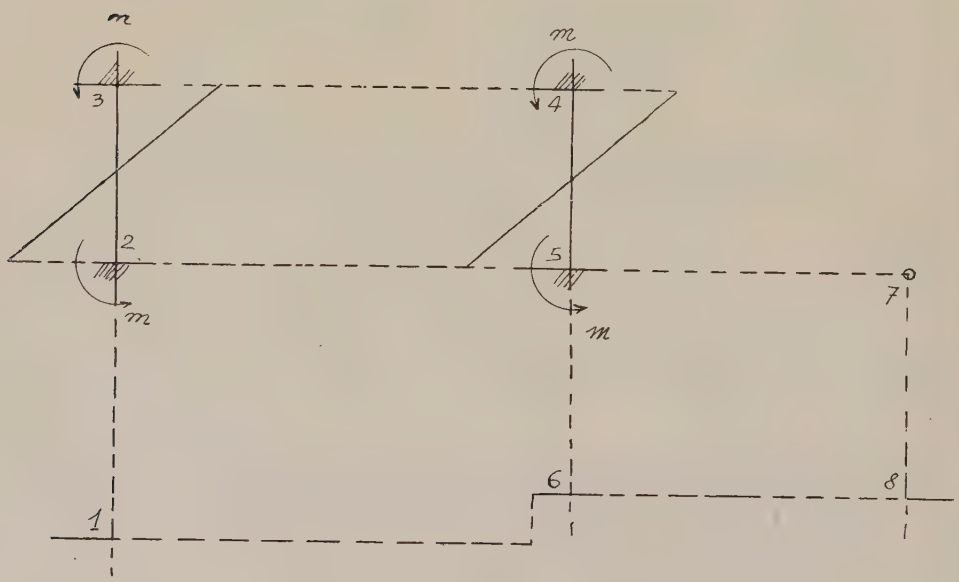


Fig. 292.

et d'additionner ces moments à ceux de la figure 292, on

a finalement les moments en m, représentés par la figure 293.

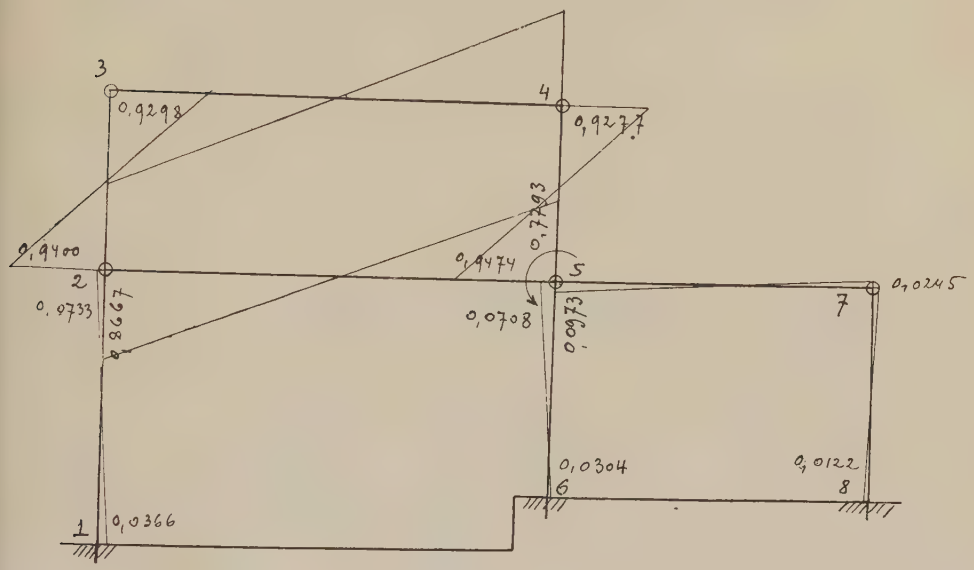


Fig. 293.

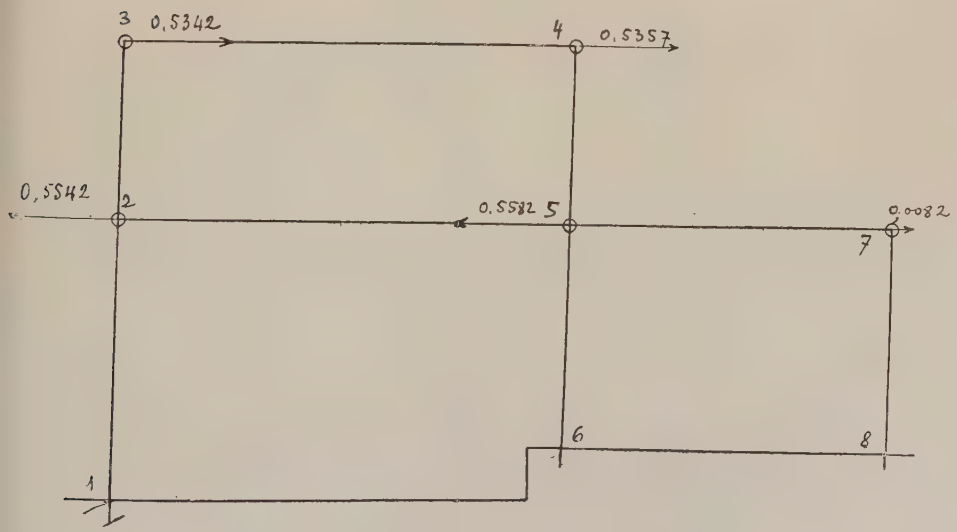


Fig. 294.

Les réactions des broches sont (fig. 294) :

En 2 :

$$-\frac{(0,0366 + 0,0733)}{5,5} m = -0,01998 m$$

$$-\frac{(0,9400 + 0,9298)}{3,5} m = -0,53421 m,$$

soit :

$$R_2 = -0,01993 m - 0,053421 m = -0,55419 m.$$

En 3 :

$$R_3 = \frac{(0,9400 + 0,9298)}{3,5} m = 0,53421 m.$$

En 4 :

$$R_4 = \frac{(0,9277 + 0,9474)}{3,5} m = 0,53574 m.$$

En 5 :

$$-\frac{(0,9277 - 0,9474)}{3,5} m = -0,53574 m$$

$$-\frac{(0,0708 + 0,0304)}{4,5} m = -0,02249 m.$$

$$R_5 = -0,53574 m - 0,02249 m = -0,55823 m.$$

En 7 :

$$R_5 = \frac{0,0245 + 0,0122}{4,5} = 0,00815 m.$$

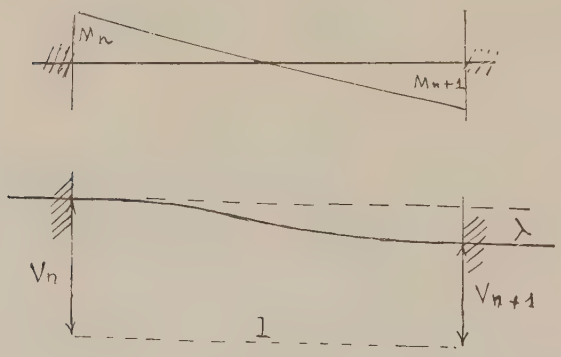


Fig. 295.

b) *Moments en* p.

Reportons-nous à la figure 295 et, à l'aide des formules de Bresse, écrivons :

$$\frac{(+p - 2p)}{6 \times 3,8 EI} 5,50 = \frac{\lambda_1}{5,5},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{-p \times 5,5^2}{2 \times 3,8\,EI} = \lambda_1. \qquad \text{(fig. 296)}$$

Pareillement pour les appuis 5 et 6 :

$$\frac{-q \times 4,5^2}{2 \times 4,2\,EI} = \lambda_1, \qquad \text{(fig. 297)}$$

et pour 7 et 8 :

$$\frac{r \times 4,5^2}{2 \times 5,1\,EI} = \lambda_1,$$

d'où :

$$\frac{p \times 5,5^2}{3,8} = \frac{q \times 4,5^2}{4,2} = \frac{r \times 4,5^2}{5,1}, \qquad \text{(fig. 298)}$$

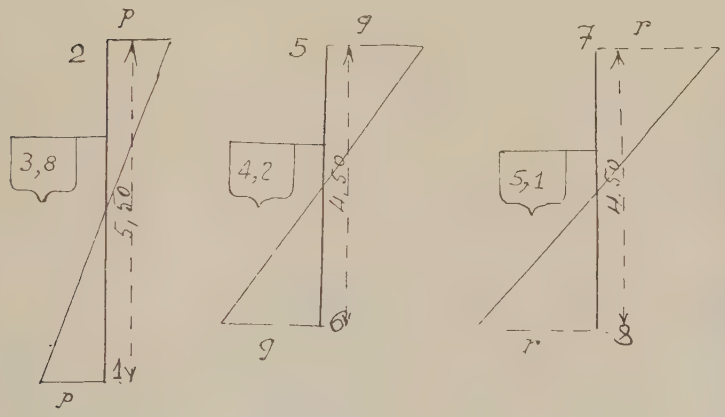


Fig. 296. Fig. 297. Fig. 298.

et :

$$q = \frac{5,5^2 \times 4,2p}{3,8 \times 4,5} = 1,6510p$$

$$r = \frac{5,5^2 \times 5,1p}{3,8 \times 4,5^2} = 2,0049p.$$

Multiplions par $1,6510p$ les moments trouvés (fig. 279) pour le moment μ incident en 5 et changeons-les de signe.

On a ainsi les moments (fig. 299) suivants :

M_1	$= 0,0340p$	M_{5-4}	$= 0,0632p$
M_{2-1}	$= -0,0680p$	M_{5-2}	$= 1,0827p$
M_{2-5}	$= -0,0946p$	M_{5-6}	$= -0,2126p$
M_{2-3}	$= 0,0266p$	M_6	$= 0,1063p$

$M_3 = -0{,}0108p$ $\quad$ $M_{5-7} = -0{,}2924p$

$M_4 = -0{,}0282p$ $\quad$ $M_7 = 0{,}0735p$

$M_8 = -0{,}0367p$

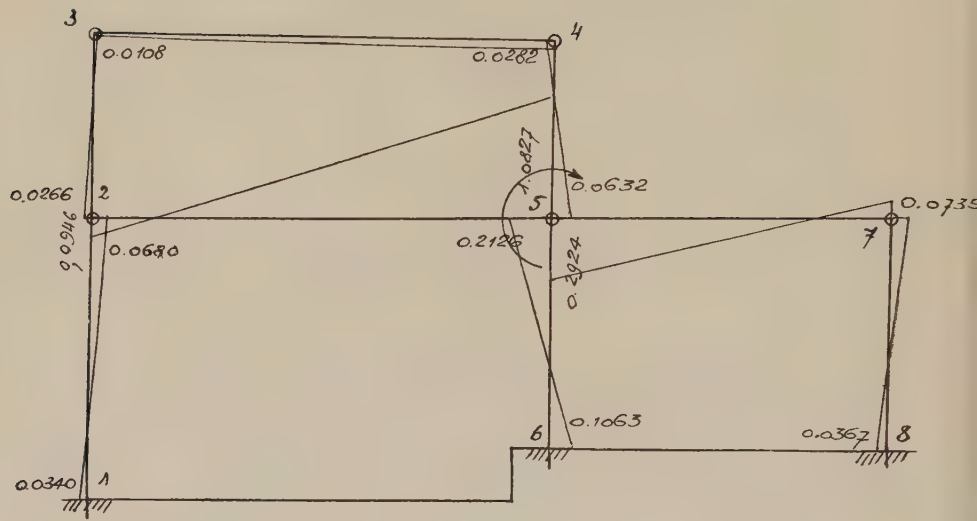


Fig. 299.

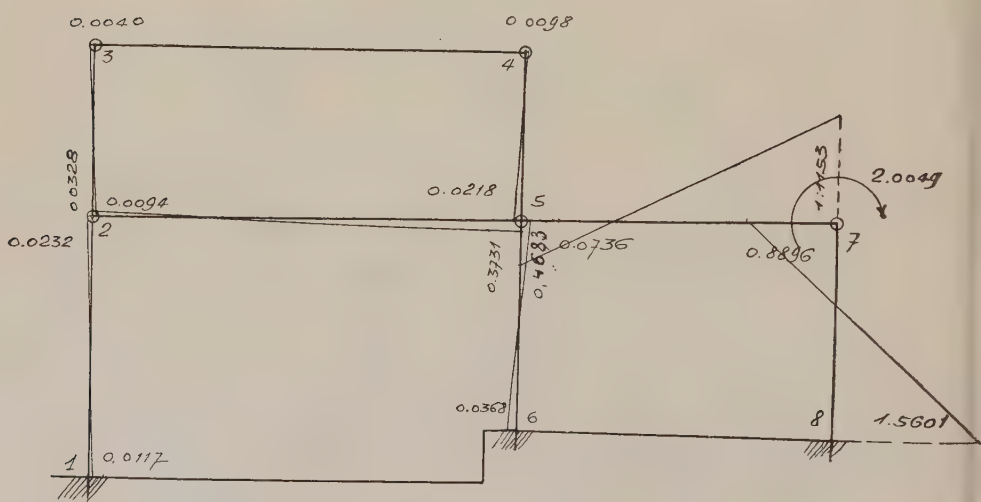


Fig. 300.

Multiplions par $2{,}0049p$ les moments trouvés (fig. 283)

pour le moment μ incident en 7 et changeons-les de signe, on a ainsi les moments (fig. 300) suivants :

$M_1 = -0{,}0117p$	$M_{5-2} = -0{,}3731p$
$M_{2-1} = 0{,}0234p$	$M_{5-6} = 0{,}0736p$
$M_{2-5} = 0{,}0328p$	$M_6 = -0{,}0368p$
$M_{2-3} = -0{,}0094p$	$M_{5-7} = -0{,}4683p$
$M_3 = 0{,}0040p$	$M_{7-5} = 1{,}1153p$
$M_4 = 0{,}0098p$	$M_{7-8} = -0{,}8896p$
$M_{5-4} = -0{,}0218p$	$M_8 = 1{,}5601p$

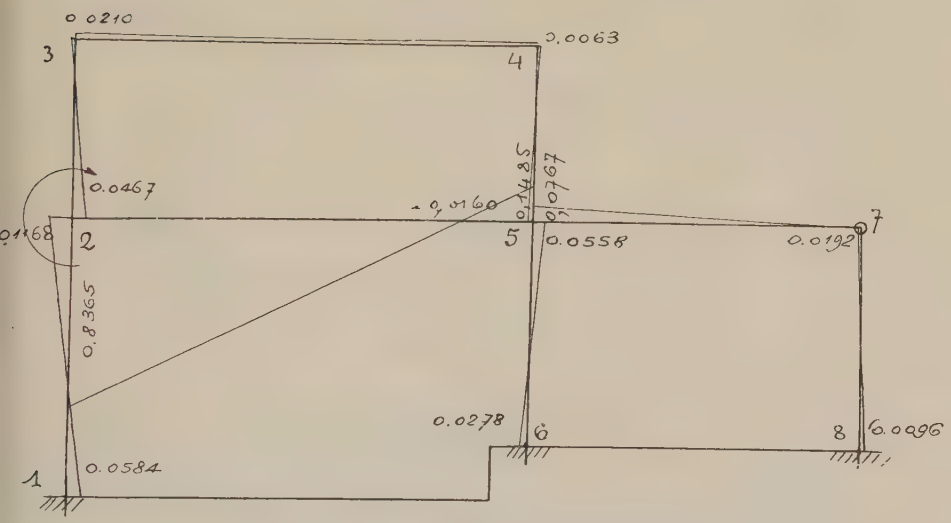


Fig. 301.

Pour $-p$, prenons les moments de la figure 276 changés de signe (fig. 301) :

$M_1 = -0{,}0584p$	$M_{5-2} = 0{,}1485p$
$M_{2-1} = 0{,}1168p$	$M_{5-6} = 0{,}0558p$
$M_{2-5} = -0{,}8365p$	$M_6 = -0{,}0278p$
$M_{2-3} = 0{,}0467p$	$M_{5-7} = 0{,}0767p$
$M_3 = 0{,}0210p$	$M_7 = -0{,}0192p$
$M_4 = 0{,}0063p$	$M_8 = 0{,}0096p$
$M_{5-4} = -0{,}0160p$	

En additionnant les moments des figures 299, 300, 301, 302, on a tous les moments en p résultant des déplace-

ments successifs des appuis d'une longueur λ_1 vers la gauche (fig. 303) :

$$M_1 = 0{,}9837p \qquad M_{5-2} = 0{,}8589p$$
$$M_{2-1} = -0{,}9277p \qquad M_{5-6} = 1{,}5676p$$

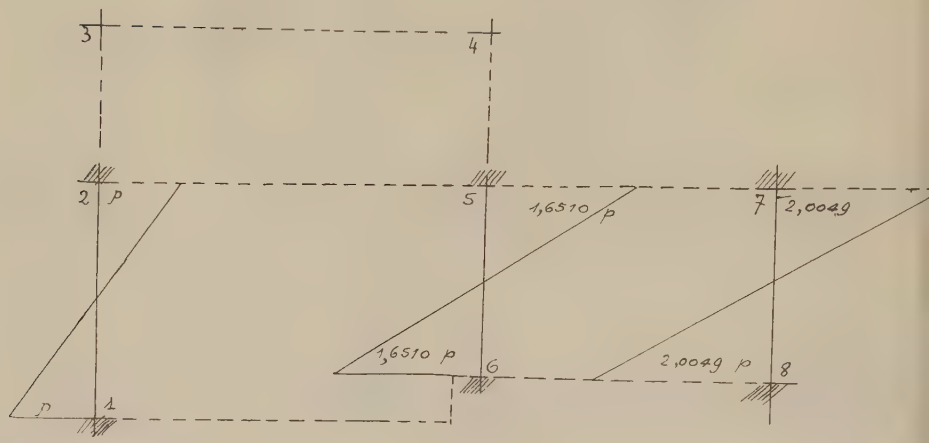


Fig. 302.

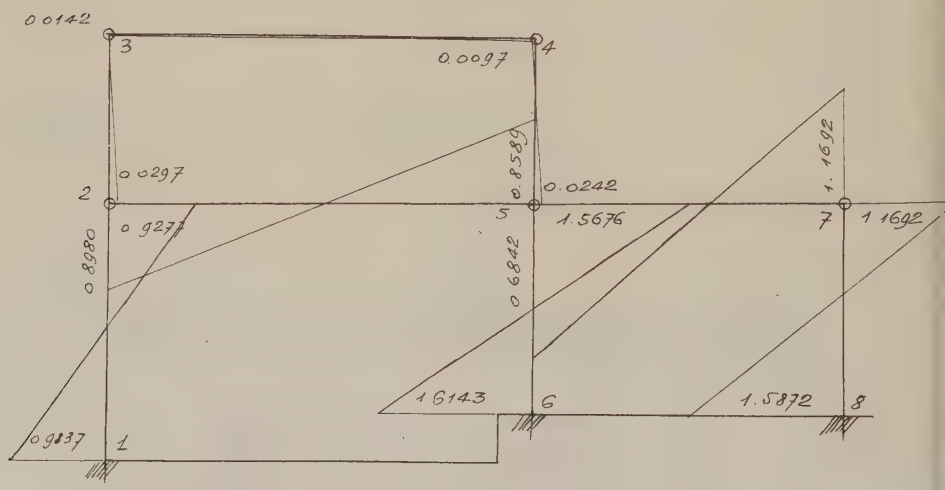


Fig. 303.

$$M_{2-5} = -0{,}8980p \qquad M_6 = -1{,}6143p$$
$$M_{2-3} = -0{,}0297p \qquad M_{5-7} = -0{,}6842p$$
$$M_3 = 0{,}0142p \qquad M_7 = 1{,}1692p$$
$$M_4 = -0{,}0097p \qquad M_8 = 1{,}5872p$$
$$M_{5-4} = 0{,}0242p$$

Les réactions des broches des appuis auxiliaires sont en 2 (fig. 304) :

$$\frac{(0,9277 + 0,9837)}{5,5} p = 0,34753p$$

$$\frac{(0,0142 + 0,0297)}{3,5} p = 0,01254p$$

$$R_2 = 0,34753p + 0,01254p = 0,36007p.$$

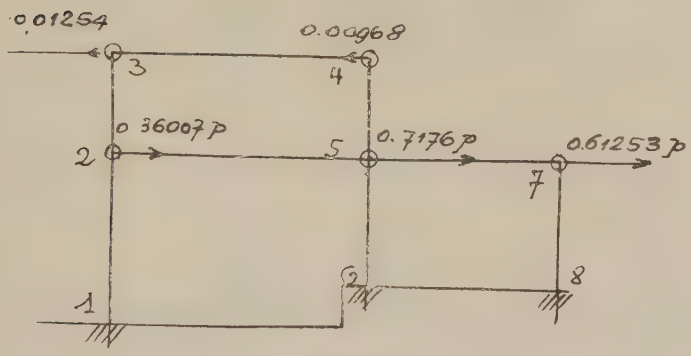


Fig. 304.

En 3 :

$$R_3 = -\frac{(0,0142 + 0,0297)}{3,5} p = -0,01254p.$$

En 4 :

$$R_4 = \frac{(0,0097 \times 0,0242)}{3,5} p = -0,00968p.$$

En 5 :

$$\frac{(0,0097 + 0,0242)}{3,5} p = 0,00968p$$

$$\frac{(1,5676 + 1,6143)}{4,5} p = 0,70708p$$

$$R_5 = (0,00968p + 0,70708)p = 0,71676p.$$

En 7 :

$$\frac{(1,1692 + 1,5872)}{4,5} p = 0,61253p.$$

Les déformations qui résultent des actions des forces F_1 et F_2 sont identiques à celles provoquées par celles des

réactions en m et p; ces deux systèmes sont donc équivalents, d'où :

$$F_1 = (0{,}36007 + 0{,}71676 + 0{,}61253)p + (-0{,}55419 - 0{,}55823 + 0{,}00815)\,m$$
$$F_2 = -(0{,}01254 + 0{,}00968)p + (0{,}53421 + 0{,}53574)\,m,$$

c'est-à-dire :

$$F_1 = -1{,}68936p - 1{,}10427\,m$$
$$F_2 = -0{,}0222\ p + 1{,}06995\,m.$$

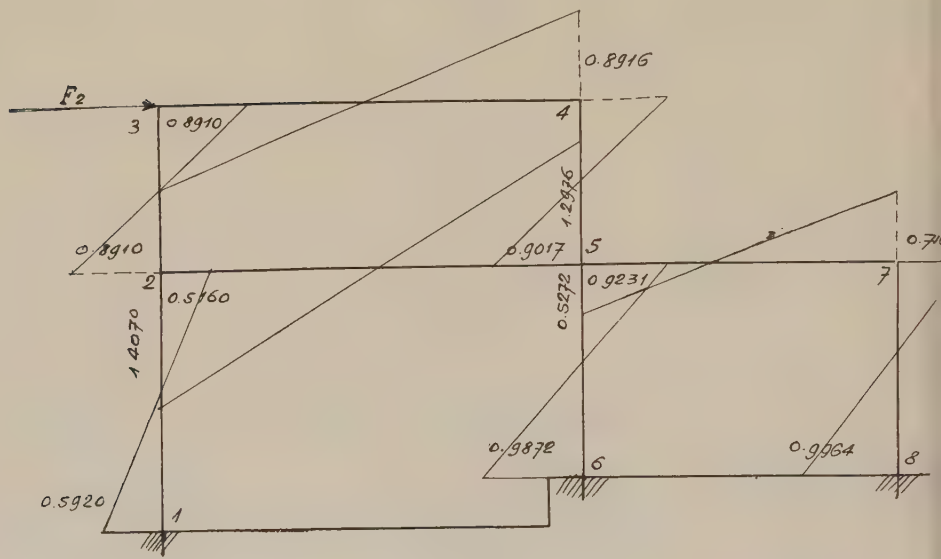


Fig. 305.

Pour les calculs qui restent à effectuer, afin de diminuer le nombre des opérations, il est utile de connaître les racines des équations suivantes :

$$\begin{aligned} 1{,}68936p - 1{,}10427\,m &= 0 \\ -0{,}0222\ p + 1{,}06995\,m &= F_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

où :

$$p = 0{,}6327\,F_2, \qquad m = 0{,}9679\,F_2$$

ainsi que de :

$$\begin{aligned} 1{,}68936p - 1{,}10427\,m &= F_1 \\ -0{,}0222\ p + 1{,}06995\,m &= 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

dont les racines sont :

$$p = 0{,}6004\,F_1, \qquad m = 0{,}0125\,F_1.$$

Reportons-les, dans les expressions des figures 293 et 303 et on a (fig. 305) :

$M_1 = 0{,}5920\,F_2$	$M_{5-2} = 1{,}2976\,F_2$
$M_{2-1} = -0{,}5160$	$M_{5-6} = 0{,}9231$
$M_{2-5} = -1{,}4070$	$M_6 = -0{,}9872$
$M_{2-3} = 0{,}8910$	$M_{5-7} = -0{,}5272$
$M_3 = -0{,}8910$	$M_7 = 0{,}7161$
$M_4 = 0{,}8916$	$M_8 = -0{,}9964$
$M_{5-4} = -0{,}9017$	

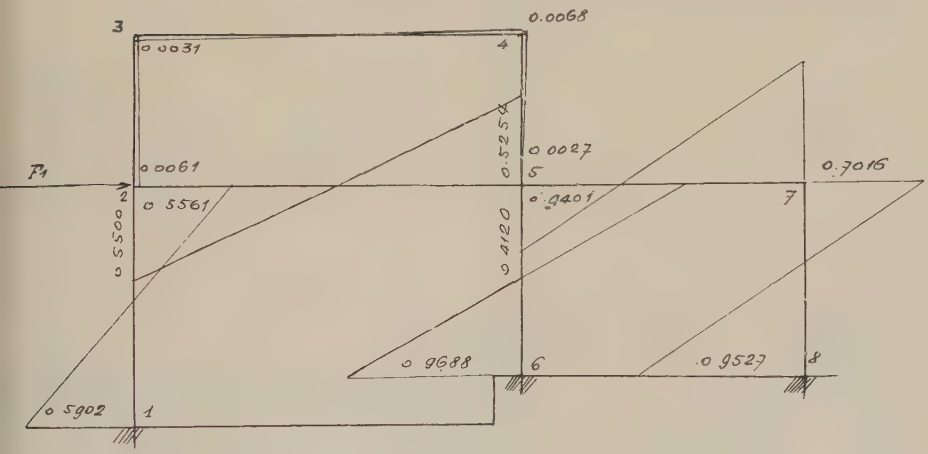


Fig. 306.

et (fig. 306) :

$M_1 = 0{,}5902\,F_1$	$M_{5-2} = 0{,}5254$
$M_{2-1} = -0{,}5561$	$M_{5-6} = 0{,}9401$
$M_{2-5} = -0{,}5500$	$M_6 = -0{,}9688$
$M_{2-3} = -0{,}0061$	$M_{5-7} = -0{,}4120$
$M_3 = -0{,}0031$	$M_7 = 0{,}7016$
$M_4 = 0{,}0068$	$M_8 = -0{,}9527$
$M_{5-4} = 0{,}0027\,F_1$	

Moments de flexion dus aux charges verticales.

Calculons les moments dus à ces charges, la construction étant pourvue d'appuis auxiliaires aux points 2, 3, 4,

5 et 7 ; utilisons pour cela la méthode des encastrements auxiliaires.

1° *Traverse* 3-4. — Encastrements en 3 et 4 :

Charge continue de 475 kg. par mètre courant : $\frac{pl^2}{12}$.

$$m_{3p} = m_{4p} = \frac{475 \times 9^2}{12} = 3.206 \text{ kg./m.}$$

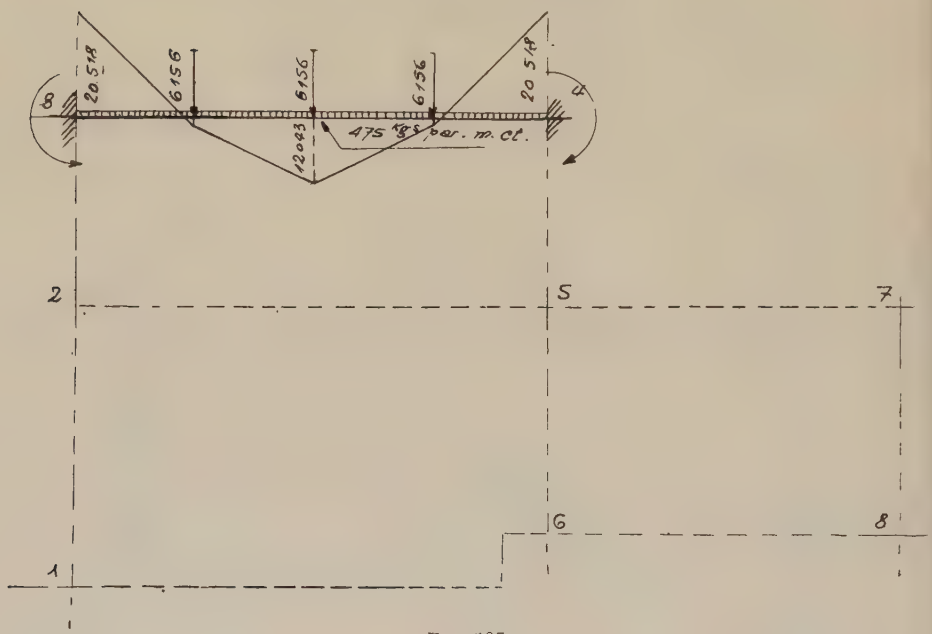


Fig. 307.

Forces isolées de 6.156 kg., formule courante :

$$m_{3P} = \frac{\Sigma mn^2 P}{l^2}.$$

Pour les trois forces P :

$$\begin{aligned} 2,25 \times 6,\overline{75}^2 P &= 102,515 P \\ 4,50 \times 4,\overline{50}^2 P &= 91,125 P \\ 6,75 \times 2,\overline{25}^2 P &= 34,172 P \\ \hline & 227,812 P \end{aligned}$$

Le moment $m_{3P} = \frac{227,812 P}{81} = 2,8125 P.$

Pour 6.156 :

$$2{,}81125 \times 6{,}156 = 17.312.$$

Les moments $M_3 = -M_4 = 3.206 + 17.312 = 20.518$. (fig. 307).

Pour connaître les moments existants dans la construction, il faudra appliquer à celle-ci en 3 un moment incident : — 20.518, et en 4 un autre : + 20.518.

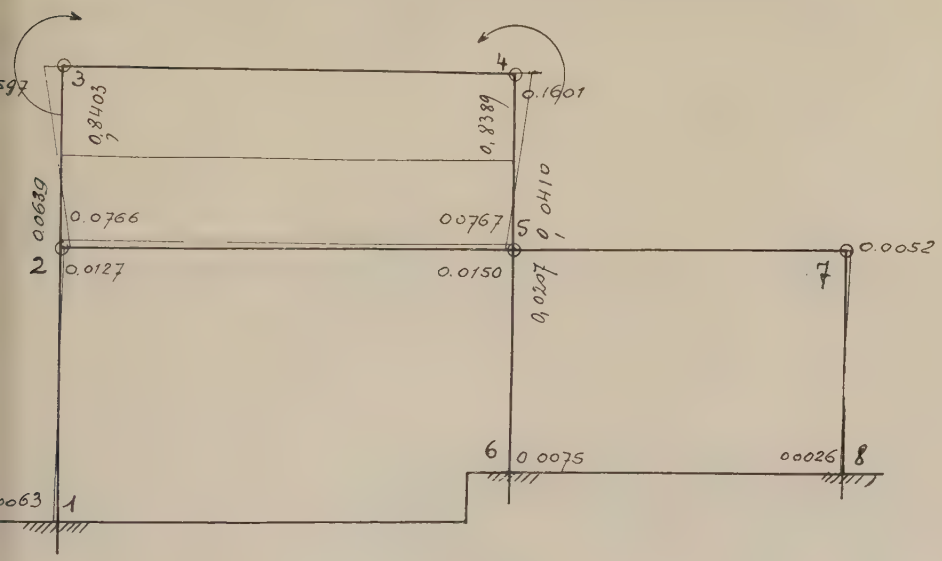


Fig. 308.

Ajoutons les moments de la figure 273 changés de signes à ceux de la figure 282, nous avons ainsi (fig. 308) :

M_1	= 0,0063	M_{5-4}	= — 0,0767
M_{2-1}	= — 0,0127	M_{5-2}	= 0,0410
M_{2-5}	= 0,0639	M_{5-6}	= — 0,0150
M_{2-3}	= 0,0766	M_6	= 0,0075
M_{3-2}	= 0,1597	M_{5-7}	= — 0,0207
M_{3-4}	= — 0,8403	M_7	= 0,0052
M_{4-3}	= 0,8389	M_8	= — 0,0026
M_{4-5}	= 0,1601		

lesquels, multipliés par 20.518, donnent (fig. 309) :

M_1	= 130	M_{5-4}	= — 1.573
M_2	= — 261	M_{5-2}	= 841

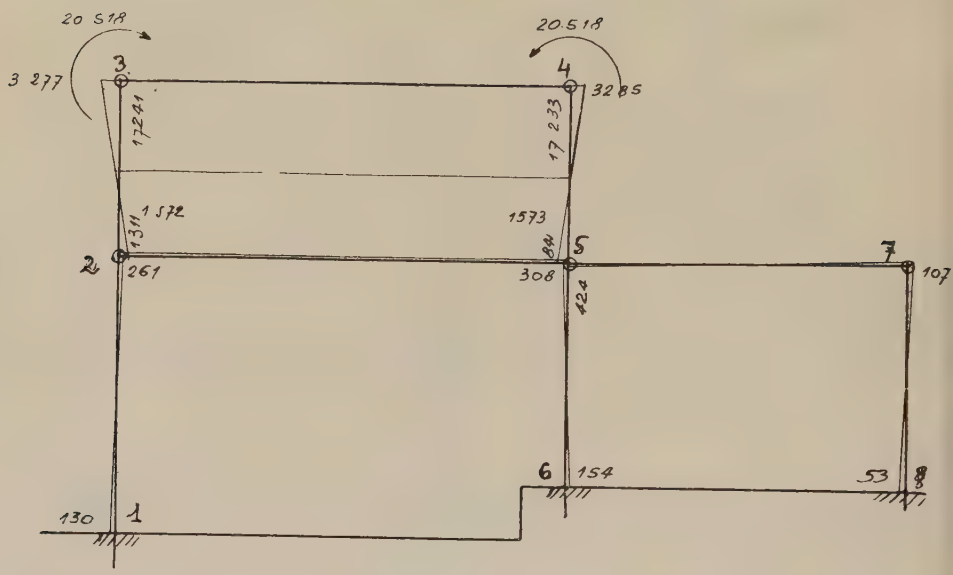


Fig. 309.

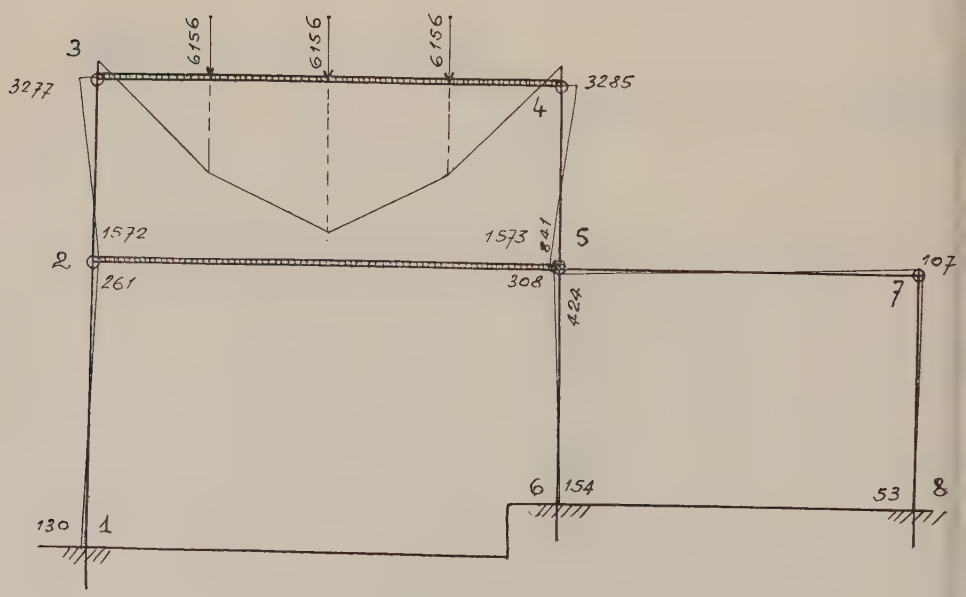


Fig. 3 10.

$M_{2-5} =$	1.311	$M_{5-6} = -$	308
$M_{2-3} = -$	1.572	$M_6 =$	154
$M_{3-2} =$	3.277	$M_{5-7} = -$	424
$M_{3-4} = -$	17.241	$M_7 =$	107
$M_{4-3} = -$	17.233	$M_8 = -$	53
$M_{4-5} =$	3.285		

Additionnons-les aux moments de la figure 307, on obtient ainsi les résultats consignés dans la figure 310 qui ne sont autres que ceux ci-dessus où M_{3-4} et M_{4-5} sont devenus respectivement 3.277 et 3.285.

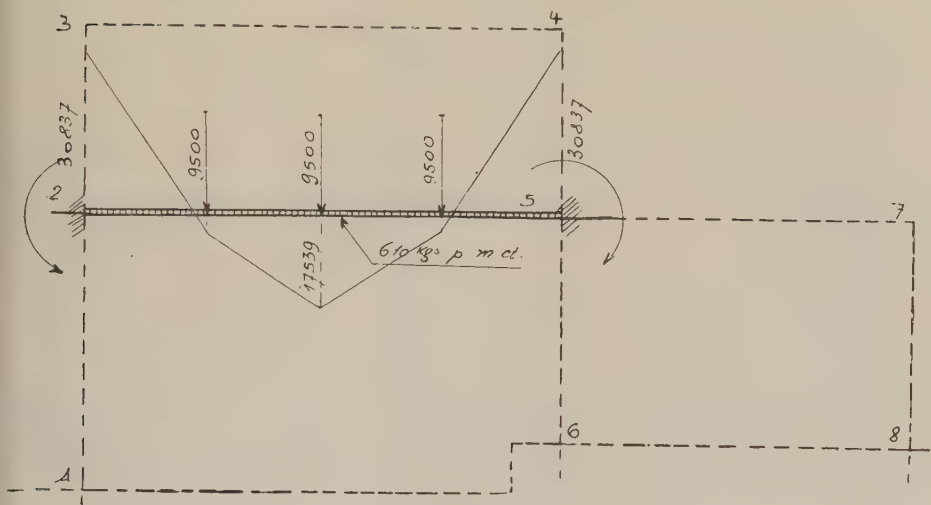


Fig. 311.

Passons maintenant aux charges qui agissent sur la traverse horizontale 2-5, procédons de la même façon en nous servant des encastrements auxiliaires en 2 et 5 (fig. 311).

Charge continue de 610 kg. par mètre courant : $\frac{pl^2}{12} = 4.118$:

$$m_{2p} = m_{5p} = \frac{610 \times 9^2}{12} = 4.118 \text{ kg./m.}$$

Force isolée de 9.500 kg., formule courante :

$$m_{2P} = \frac{\Sigma mn^2 P}{l^2},$$

calculé pour m_{3P}, pour les charges de la traverse 3-4 et qui est :

$$m_{2P} = 2{,}8125\,P,$$

soit :

$$2{,}8125 \times 9.500 = 26.7187.$$

Les moments $M_2 = M_{5-2} = 4{,}1181 + 26{,}719 = 30{,}837.$

Pour connaître les moments de la construction correspondants aux charges verticales ci-dessus, appliquons à

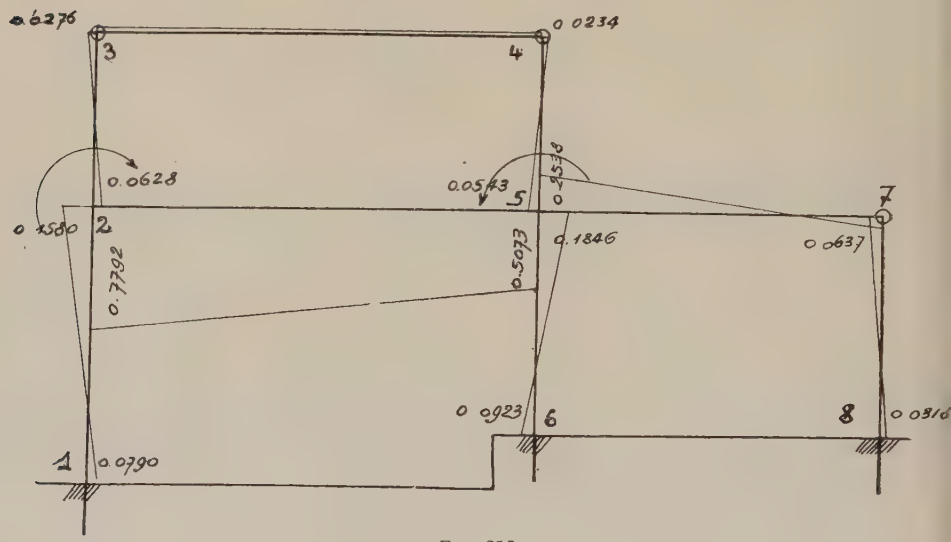


Fig. 312.

celle-ci, considérée comme étant pourvue d'appuis auxiliaires, les moments incidents 30.837 en 2 et —30.837 en 5.

Ajoutons les moments de la figure 279 à ceux de la figure 276 changés de signes, on obtient (fig. 312) :

M_1	$= -0{,}0790$	M_{5-2}	$= 0{,}5073$
M_{2-1}	$= 0{,}1580$	M_{5-6}	$= 0{,}1846$
M_{2-5}	$= -0{,}7792$	M_6	$= 0{,}0923$
M_{2-3}	$= -0{,}0628$	M_{5-7}	$= 0{,}2538$
M_3	$= 0{,}0276$	M_7	$= -0{,}0637$
M_4	$= 0{,}0234$	M_8	$= 0{,}0318$
M_{5-4}	$= -0{,}0543$		

lesquels, multipliés par 30.837, donnent (fig. 313) :

M_1	$= -$ 2.436	M_{5-2}	$= -$ 15.644
M_{2-1}	$=$ 4.872	M_{5-6}	$=$ 5.963
M_{2-5}	$= -$ 24.028	M_6	$=$ 2.846
M_{2-3}	$= -$ 1.937	M_{5-7}	$=$ 7.826
M_3	$=$ 851	M_7	$= -$ 1.964
M_4	$=$ 721	M_8	$=$ 982
M_{5-4}	$=$ 1.674		

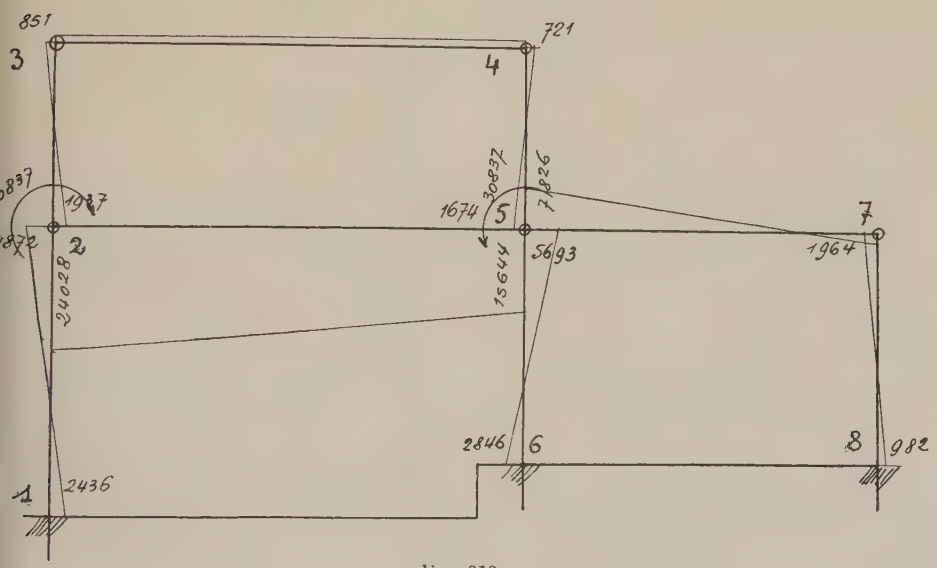


Fig. 313.

Ajoutons ces moments à ceux obtenus en ayant pris la traverse 2-7 comme encastrée en 2 et 5 (fig. 311), on a les mêmes résultats, sauf pour M_{2-5} et M_{5-2}, qui deviennent :

$$M_{2-5} = 30.837 - 24.028 = 6.809$$
$$M_{2-5} = 30.837 - 15.644 = 15.193$$

consignés sur la figure 314.

Pour la traverse 5-7 supposée encastrée en 5 et 7, nous avons la charge continue de 265 kg. par mètre courant :

$$M_{5p} = M_{7p} = \frac{265 \times 6,75^2}{12} = 1.006.$$

Pour les deux forces isolées de 6.156 kg. :

$$M_{5P} = M_{7P} = \frac{\Sigma mn^2 P}{l^2},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 2,25 \times 4,5^2 &= 45,5625 \\ 4,50 \times 2,25^2 &= 22,7812 \\ \hline & 68,3437 : 6,75^2 = 1,5 \end{aligned}$$

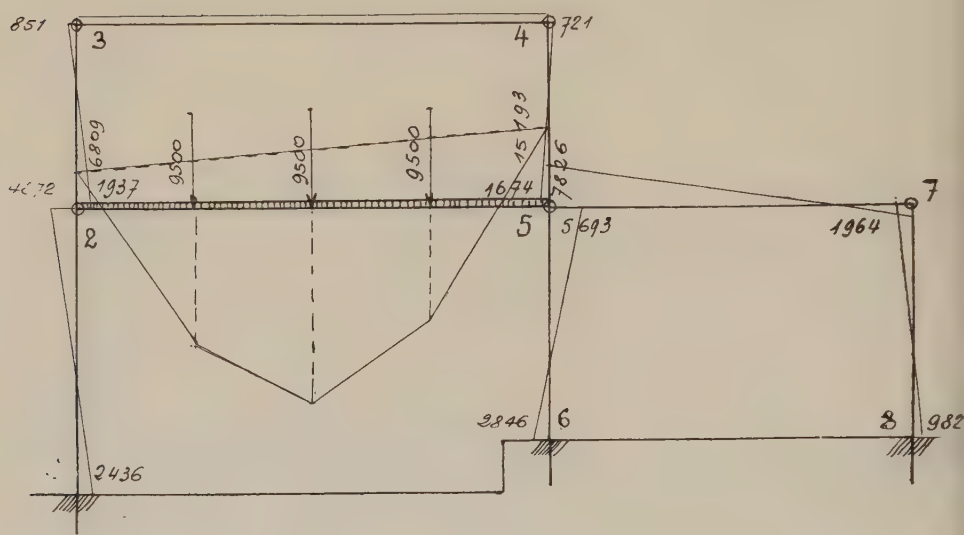


Fig. 314.

donc :

$$6.156 \times 1,5 = 9.234$$

et finalement :

$$M_5 = M_7 = 1.006 + 9.234 = 10.240 \text{ kg./m. (fig. 315).}$$

Pour connaître les moments de la construction sous les actions des charges ci-dessus, il y a lieu d'appliquer à cette dernière, considérée comme à appuis auxiliaires, les moments incidents — 10.240 en 5 et 10.240 en 7.

Ajoutons les moments de la figure 283 à ceux de la figure 279 changée de signes, nous obtenons (fig. 316) :

$$\begin{aligned} M_4 &= 0,9264 & M_{5-2} &= -0,8419 \\ M_{2-4} &= -0,9529 & M_{5-6} &= -0,1656 \end{aligned}$$

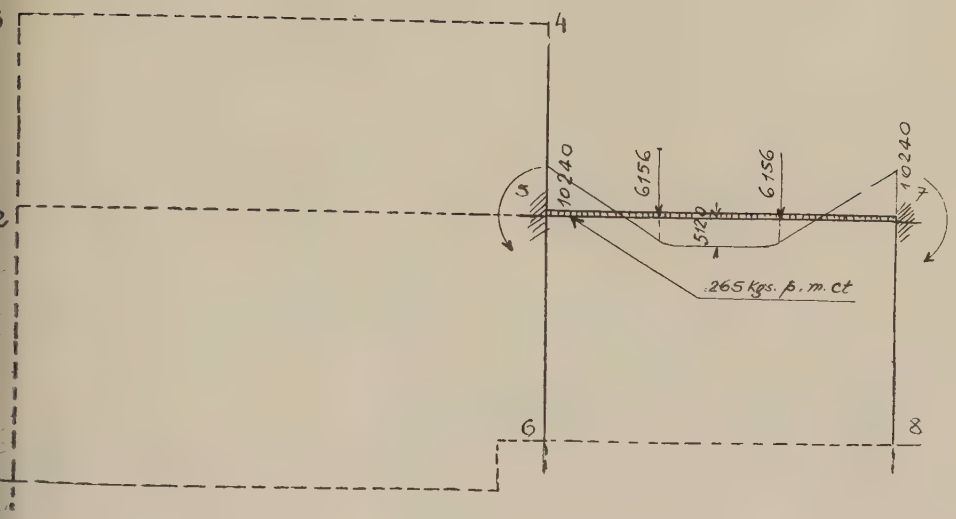


Fig. 315.

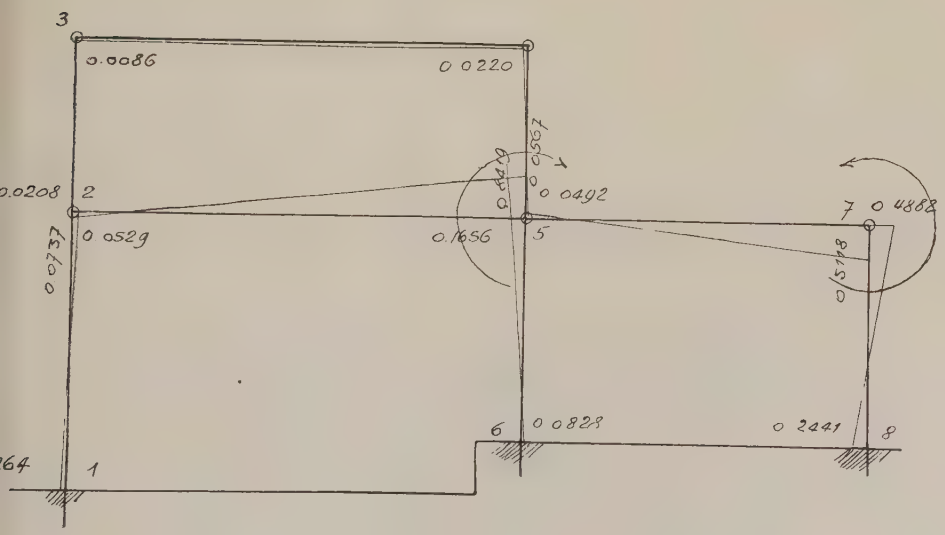


Fig. 316.

$M_{2-5} = -0{,}0737$	$M_6 = 0{,}0828$
$M_{2-3} = 0{,}0208$	$M_{5-7} = 0{,}0567$
$M_3 = -0{,}0086$	$M_{7-5} = 0{,}5118$
$M_4 = -0{,}0220$	$M_{7-2} = 0{,}4882$
$M_{5-4} = 0{,}0492$	$M_8 = -0{,}2441$

Lesquels multipliés par 10.240 donnent (fig. 317) :

$M_1 = 271$	$M_{5-2} = 8.621$
$M_{2-1} = -542$	$M_{5-6} = -1.696$
$M_{2-5} = -329$	$M_6 = 848$
$M_{2-3} = 213$	$M_{5-7} = 581$
$M_3 = -88$	$M_{7-5} = -5.650$
$M_4 = -225$	$M_{7-3} = 4.999$
$M_{5-4} = 504$	$M_8 = -2.499$

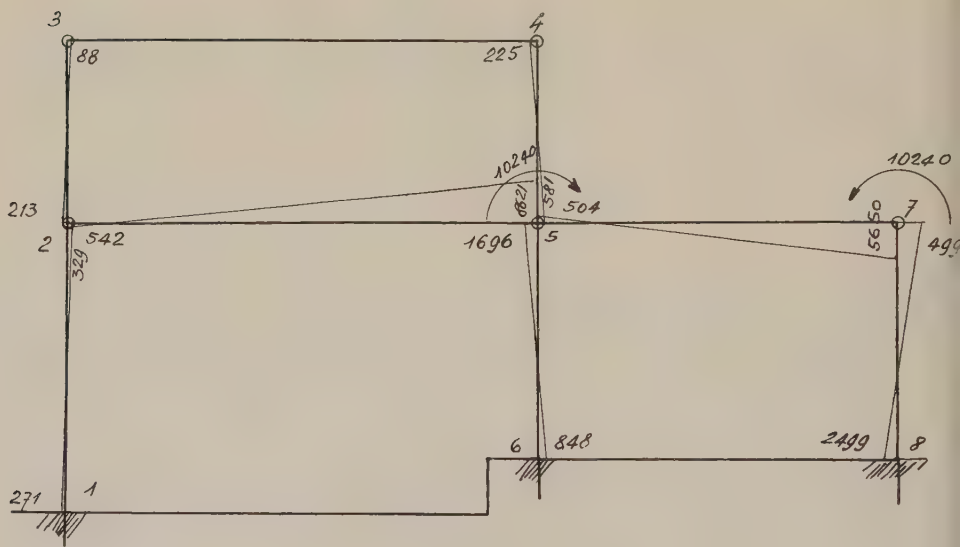


Fig. 317.

Ajoutons ces moments à ceux relatifs à la traverse 5-7, considérée comme encastrée en 5 et 7 (fig. 315), on a les mêmes résultats, sauf pour m_{5-7} et m_{7-5} qui deviennent :

$$m_{5-7} = 10.240 + 581 = 10.821$$
$$m_{7-5} = 10.240 - 5.650 = 4.990 \text{ (fig. 318)}.$$

Ajoutons les moments figurant aux dessins (fig. 319) :

$M_1 = 2.034$	$M_{5-4} = -2.743$
$M_{2-1} = 4.069$	$M_{5-2} = 24.665$

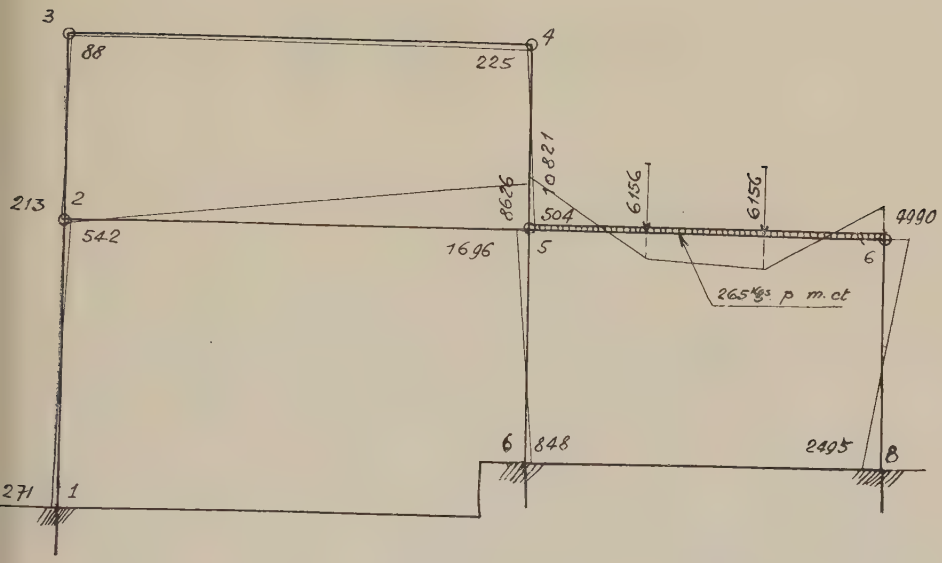


Fig. 318.

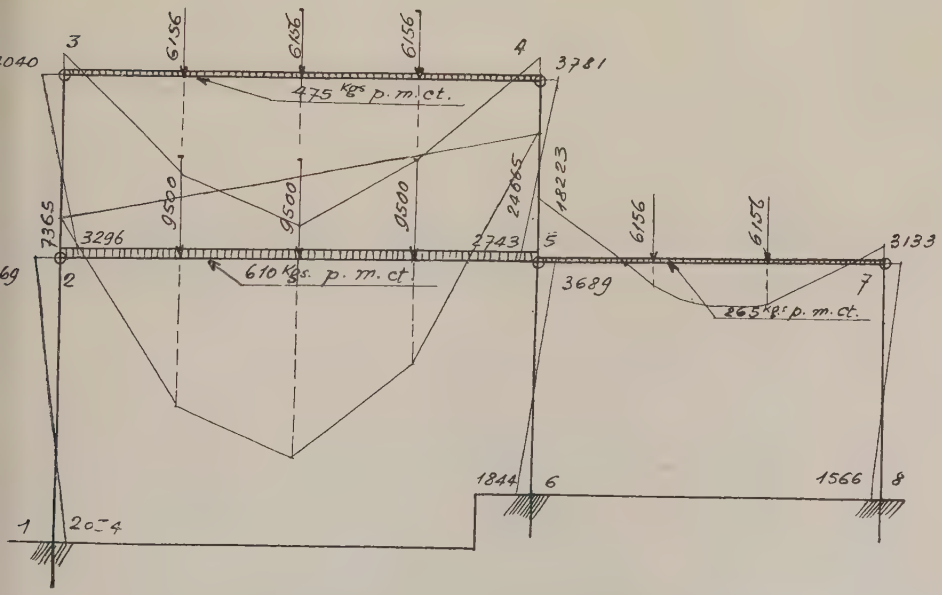


Fig. 319.

M_{2-3}	$= 7.365$	M_{5-6}	$= 3.689$
M_{2-5}	$= 3.296$	M_6	$= -1.844$
M_3	$= 4.040$	M_{5-7}	$= 18.223$
M_4	$= 3.781$	M_7	$= 3.133$
		M_8	$= -1.566$

Calculons maintenant les réactions des broches des appuis auxiliaires (fig. 320 et 321) :

$$R_2 = -\frac{4.040 + 3.296}{3,50} - \frac{4.069 + 2.034}{3,5} = 2.096 - 1.109.$$

$$R_3 = -\frac{4.040 + 3.296}{3,50} = -2.096 \qquad R_4 = \frac{3.781 + 2.743}{3,50} = 1.864,$$

$$R_5 = \frac{3.689 + 1.844}{4,5} - \frac{3.781 + 2.743}{3,5} = 1.229 - 1.864,$$

$$R_7 = \frac{3.133 + 1.566}{4,5} = 1.044.$$

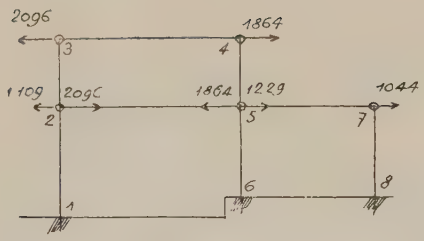


Fig. 320.

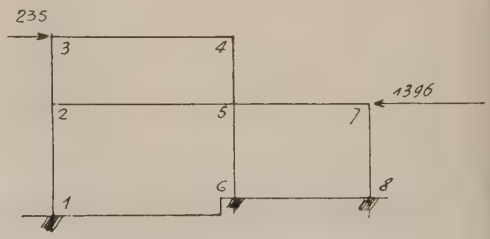


Fig. 321.

En les changeant de signe, on a les efforts qu'il faut appliquer à la construction à l'état naturel, c'est-à-dire : 2.096 — 1.864 = 235, suivant la traverse 3-4, et 1.109 — 2.096 + 1.864 — 1.299 — 1.044 = 1.396, suivant la traverse 2, 5, 7, et pour lesquels on obtient en donnant à F_2 de la figure 305 la valeur 235 (fig. 322) :

M_1	$= 0,5920 \times 235 =$	139
M_{2-1}	$= 0,5160 =$	-121
M_{2-5}	$= 1,4070 =$	-330
M_{2-3}	$= 0,8910 =$	209
M_3	$= 0,8910 =$	-209
M_4	$= 0,9816 =$	210
M_{5-4}	$= 0,9017 =$	-212
M_{5-2}	$= 1,2976 =$	305
M_{5-6}	$= 0,9231 =$	217

$$M_6 = 0{,}9872 \times 235 = -232$$
$$M_{5-7} = 0{,}5272 = -124$$
$$M_7 = 0{,}7161 = 168$$
$$M_8 = 0{,}9964 = -234$$

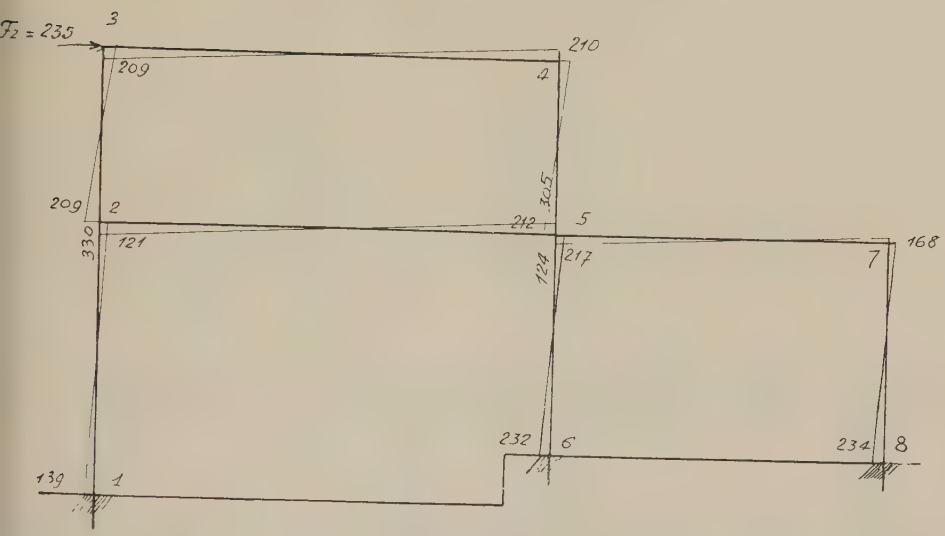


Fig. 322.

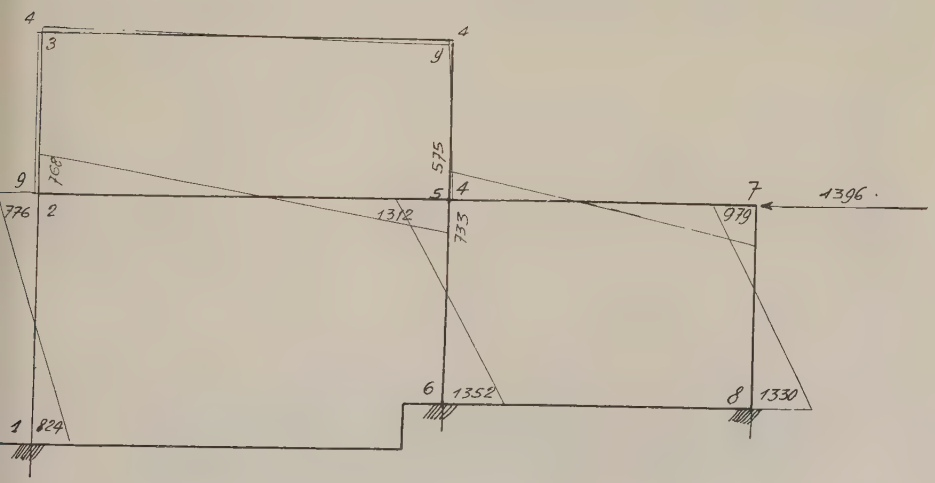


Fig. 323.

Et pour la force $F_1 = -1.396$ employons, changés de

signes, les résultats obtenus précédemment et correspondant à la figure 247, et nous avons (fig. 323) :

M_1	$= 0{,}5901 \times 1.396 =$	$-$ 824
M_{-1}	$= 0{,}5561$	$=$ 776
M_{2-5}	$= 0{,}5500$	$=$ 768
M_{2-3}	$= 0{,}0061$	$=$ 9
M_3	$= 0{,}0031$	$=$ 4
M_4	$= 0{,}0068$	$=$ $-$ 9
M_{5-4}	$= 0{,}0027$	$=$ 4
M_{5-2}	$= 0{,}5254$	$=$ $-$ 733
M_{5-6}	$= 0{,}9401$	$=$ $-$ 1.312
M_6	$= 0{,}9688$	$=$ 1.352
M_{5-7}	$= 0{,}4120$	$=$ 575
M_7	$= 0{,}7016$	$=$ $-$ 979
M_8	$= 0{,}9527$	$=$ 1.330

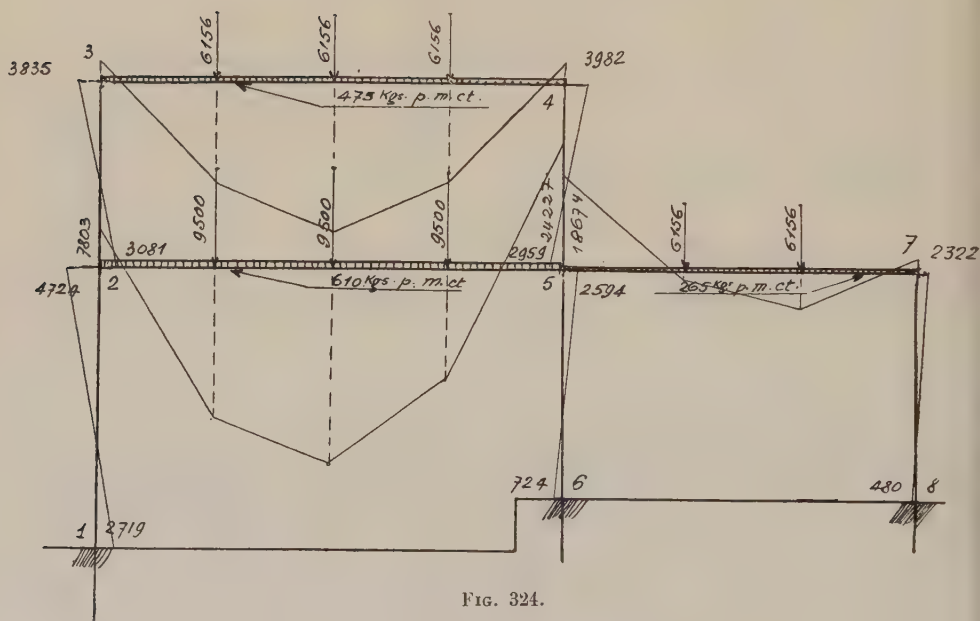


Fig. 324.

Ajoutons les résultats de la figure 319 à ceux des figures 322 et 323, et nous avons finalement ce que nous nous étions proposé de trouver, c'est-à-dire (fig. 324) :

M_1	$=-$ 2.719	M_{5-4}	$=-$ 2.959
M_{2-1}	$=$ 4.724	M_{5-2}	$=$ 24.227
M_{2-5}	$=$ 7.803	M_{5-6}	$=-$ 2.594

$M_{5-7} =$	18.674	$M_6 =$	— 724
$M_{2-3} =$	— 3.081	$M_7 =$	2.322
$M_3 =$	3.835	$M_8 =$	— 480
$M_4 =$	3.982		

ACTION DU VENT

Le cadre représenté par la figure 100 correspond à une série de travées ayant 6 mètres d'entre axes.

Supposons que les travées adjacentes à ce cadre soient sectionnées en leur milieu, et que l'action du vent soit reportée aux membrures horizontales du premier étage et de corniche, finalement, en 2 et 3 par ses composantes horizontales.

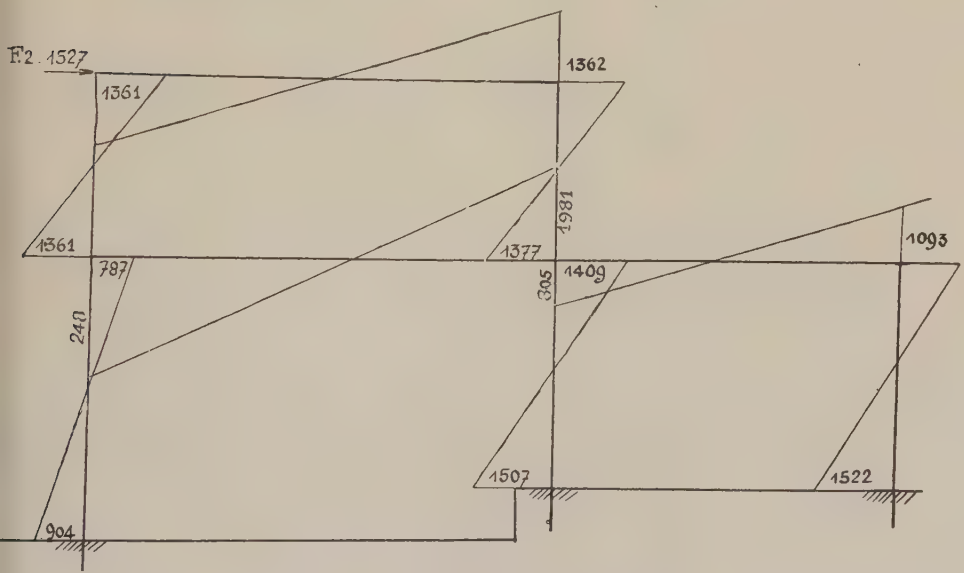


Fig. 325.

Comme il est admis que le vent agit sous un angle de 10 degrés avec l'horizontale en prenant une pression de 150 kg. par mètre carré, normale à sa direction, elle est donc de 145 kg. 47 par mètre carré de surface verticale qui donne pour l'action du vent en 3 :

$$F_2 = \frac{3,50 \times 6}{2} \times 145,47 = 1.527 \text{ kg.},$$

et, pour l'action du vent, en 2 on a :

$$F_1 = \frac{(3,50 + 5,5)}{2} \times 145,47 = 3.927 \text{ kg.}$$

Reportons ces efforts dans les résultats obtenus pour les forces F_1 et F_2 horizontales agissant en 2 et en 3 (fig. 305 et 306).

Pour F_2, nous avons les moments :

M_1	=	0,5920 × 1.527 =	904
M_{2-1}	=	— 0,5160	= — 787
M_{2-5}	=	— 1,4070	= — 2.148
M_{2-3}	=	0,8940	= 1.361
M_3	=	— 0,8940	= — 1.361
M_4	=	0,8946	= 1.362
M_{5-4}	=	0,9017	= — 1.377
M_{5-2}	=	1,2976	= 1.981
M_{5-6}	=	0,9231	= 1.409
M_6	=	— 0,9872	= — 1.507
M_{5-7}	=	— 0,5272	= — 805
M_7	=	0,7161	= 1.093
M_8	=	— 0,9964	= — 1.522

consignés à la figure 325.

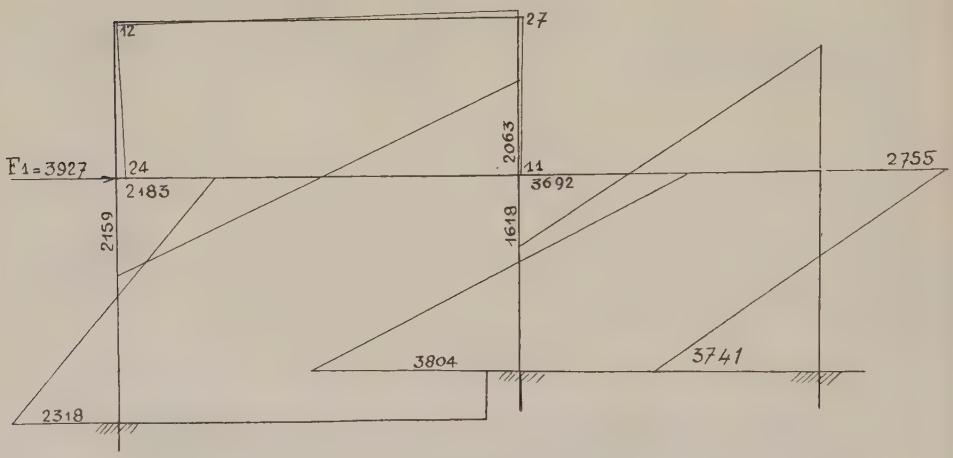


Fig. 326.

Pour F_1 pareillement :

M_1	=	0,5902 × 3.927 =	2.318
M_{2-1}	=	— 0,5561	= — 2.183
M_{2-5}	=	— 0,5500	= — 2.159

$$
\begin{aligned}
M_{2-3} &= -0{,}0061 \times 3.927 = -\ \ 24 \\
M_3 &= -0{,}0031 = -\ \ 12 \\
M_4 &= \ \ 0{,}0068 = \ \ 27 \\
M_{5-4} &= \ \ 0{,}0027 = \ \ 11 \\
M_{5-2} &= \ \ 0{,}5254 = \ \ 2.063 \\
M_{5-6} &= \ \ 0{,}9401 = \ \ 3.692 \\
M_6 &= -0{,}9688 = -\ 3.804 \\
M_{5-7} &= \ \ 0{,}4120 = \ \ 1.618 \\
M_7 &= \ \ 0{,}7016 = \ \ 2.755 \\
M_8 &= -0{,}9527 = -\ 3.741
\end{aligned}
$$

consignés à la figure 326.

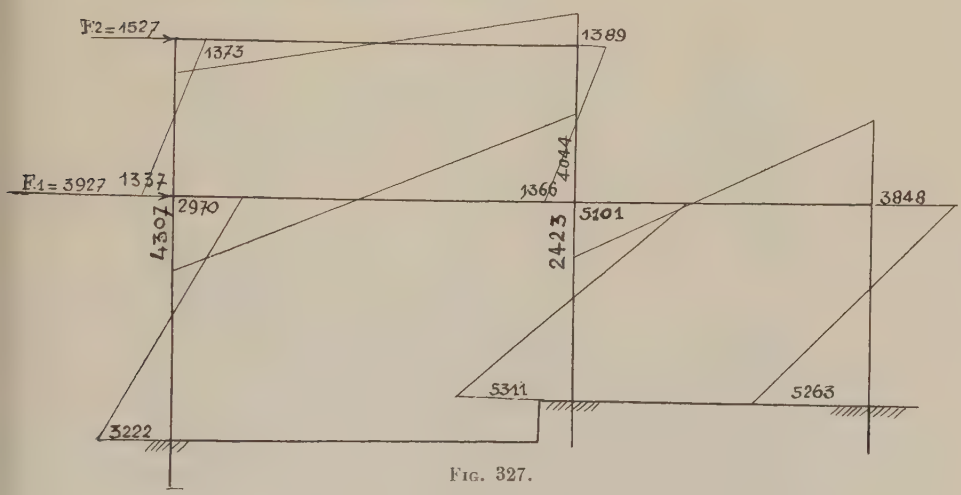


Fig. 327.

En ajoutant ces deux séries de moments, nous obtenons les résultats cherchés qui sont :

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \ \ 904 + 2.318 = \ \ 3.222 \\
M_{2-1} &= -\ (728 + 2.183) = -\ 2.970 \\
M_{2-5} &= \ (2.148 + 2.159) = \ \ 4.307 \\
M_{2-3} &= \ (1.361 - \ \ 24) = \ \ 1.337 \\
M_3 &= \ (1.361 + \ \ 12) = -\ 1.373 \\
M_4 &= \ (1.362 + \ \ 27) = \ \ 1.389 \\
M_{5-4} &= -\ (1.377 - \ \ 11) = -\ 1.366 \\
M_{5-2} &= \ (1.981 + 2.063) = \ \ 4.044 \\
M_{5-6} &= \ (1.409 + 3.692) = \ \ 5.101 \\
M_6 &= \ (1.517 + 3.804) = -\ 5.311 \\
M_{5-7} &= -\ (805 + 1.618) = -\ 2.423 \\
M_7 &= \ (1.093 + 2.755) = \ \ 3.848 \\
M_8 &= -\ (1.522 + 3.741) = -\ 5.263
\end{aligned}
$$

consignés dans la figure 327.

INFLUENCE D'UNE VARIATION DE TEMPÉRATURE

Nous allons étudier pour la construction donnée (fig. 101) quelle est l'influence de la variation de la température existant entre celle actuelle et celle du temps de pose.

Supposons (fig. 328) que l'appui 1 reste solidement fixé tandis que les appuis 6 et 8 sont rendus libres de se déplacer verticalement tout en restant encastrés.

Sous l'influence d'une variation t de température sup-

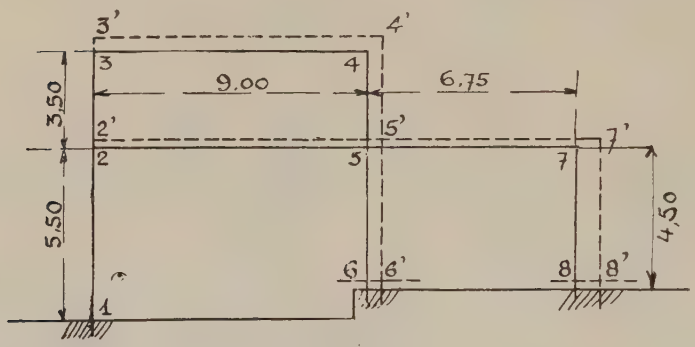


Fig. 328.

posée positive, les points 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 viendront en 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′ et 8′.

Pour donner à cette construction la forme qu'elle devrait avoir si 6 et 8 n'avaient pas suivi le mouvement de dilatation, procédons comme suit (fig. 329) :

Mettons en 2′, 3′, 4′, 5′ et 7′ des appuis auxiliaires à rotules, puis déplaçons simultanément 4′, 5′, 6′, 7′ et 8′ de manière à les amener en 4″, 5″, 6″, 7″ et 8″, les déplacements 4′4″, 5′5″, 6′6″, 7′7″, 8′8″ étant tous égaux à $(5{,}5 - 4{,}5)\,t$.

Puis amenons 6″ en 6‴, la tangente en 6″ à la fibre moyenne restant verticale (puisque par hypothèse les appuis 6 et 8 sont restés encastrés), 6″6‴ étant égal à $9\,t$; de même amenons 8″ en 8‴, la tangente en 8‴ étant verticale et $8''8''' = (9 + 6{,}75)\,t$.

Finalement, nous prendrons la construction à son état naturel du temps de pose et nous appliquerons les réac-

tions changées de sens des broches des appuis auxiliaires correspondants.

Nous ajouterons les moments provoqués par ces déplacements successifs et, en vertu du principe de superposi-

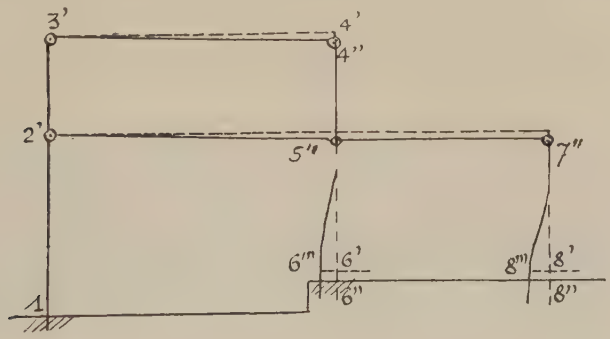


Fig. 329.

tion, nous obtiendrons les moments dus à la variation de température considérée.

Procédons donc à ces opérations :

Le premier déplacement d'amenée de 4′ en 4″ et de 5′ en 5″, entraînant les autres points 6′, 7′ et 8′, peut lui-même être envisagé comme deux déplacements virtuels successifs ; le premier de 4′ en 4″, tous les autres appuis restant fixes ; pareillement le deuxième de 5′ en 5″, tous les autres appuis restant fixes.

Les moments de flexion provenant des deux déplace-

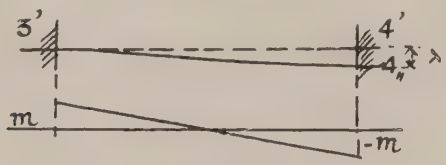


Fig. 330.

ments virtuels en question peuvent être obtenus en se servant de la méthode des appuis auxiliaires par le truchement des encastrements auxiliaires.

Une barre horizontale étant encastrée à chacune de ses extrémités, si celle de droite est abaissée d'une longueur λ,

la formule générale qui donne le moment d'encastrement m en fonction de sa longueur l, de son coefficient d'élasticité E et du moment d'inertie est la suivante, déduite des formules de Bresse (fig. 330) :

$$\frac{(2m - m)}{6\,\mathrm{EI}}\,l = \frac{\lambda}{l},$$

d'où :

$$\frac{ml^2}{6\,\mathrm{EI}} = \lambda.$$

Pour le premier déplacement de 4′ en 4″, nous supposons la traverse 3′4′ encastrée en chacun des points 3′ et 4′, le moment d'inertie étant de 1.299.000 cm³.

Le coefficient d'élasticité par centimètre carré étant pris de 230.000 kg. pour le béton armé et le coefficient de dilatation $\frac{11}{10^6}$, nous avons :

$$\frac{m \times 900^2}{6 \times 230.000 \times 1.299.000} = \frac{100 \times 11t}{10^6},$$

d'où :

$$m = 24{,}6\ \mathrm{kg./m.} \times t.$$

Pour le déplacement de 5′ en 5′ de la traverse 2-5 encastrée en 2 et en 5, seul le moment d'inertie change dans la formule ci-dessus et il est 2.664.323 cm³.

La valeur composante du moment d'encastrement est donc :

$$p = \frac{2.664.323 \times 24{,}6}{1.299.000}\,t = 50{,}5\ \mathrm{kg./m.} \times t.$$

Pour le déplacement de 6″ en 6‴, prenons deux encastrements en 6″ et 5″; le moment q correspondant sera donné par la formule :

$$\frac{q \times 4{,}50^2}{6 \times 230.000 \times 208.500} = \frac{900 \times 11t}{10^6},$$

d'où :

$$q = 140{,}7\ \mathrm{kg./m.} \times t.$$

Enfin, pour le déplacement 8″8‴, en prenant deux encastrements auxiliaires en 7′ et 8″, le moment r correspondant sera aussi donné par la formule :

$$\frac{r \times 450^2}{6 \times 230.000 \times 249.000} = \frac{1.575 \times 11t}{10^6},$$

soit :

$$r = 293,7 \text{ kg./m.} \times t.$$

Pour connaître les moments agissant sur la construction pourvue d'appuis auxiliaires, il faut ajouter aux mo-

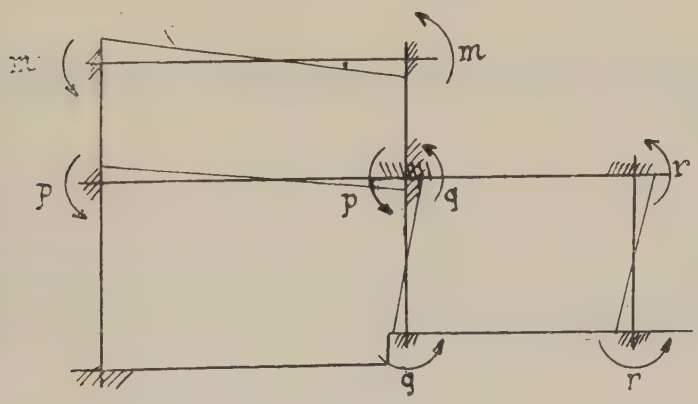


Fig. 331.

ments indiqués à la figure 331 ceux provoqués par ceux incidents de la figure 332.

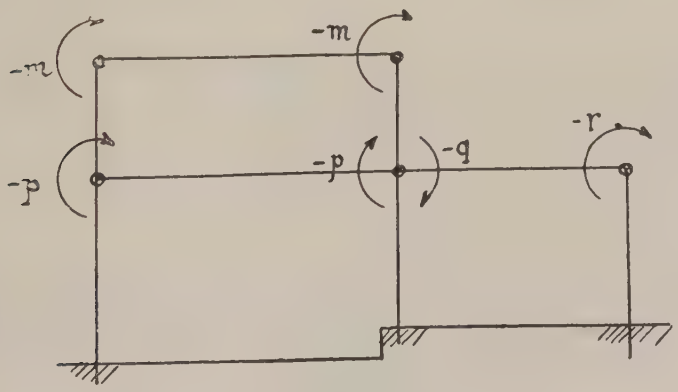


Fig. 332.

Commençons par les moments en m; pour cela, ajoutons les moments représentés aux figures 273 et 282 de

l'étude générale, changeons-les de signe, ajoutons-les aux moments de la traverse 3-4, nous avons ainsi ceux de la

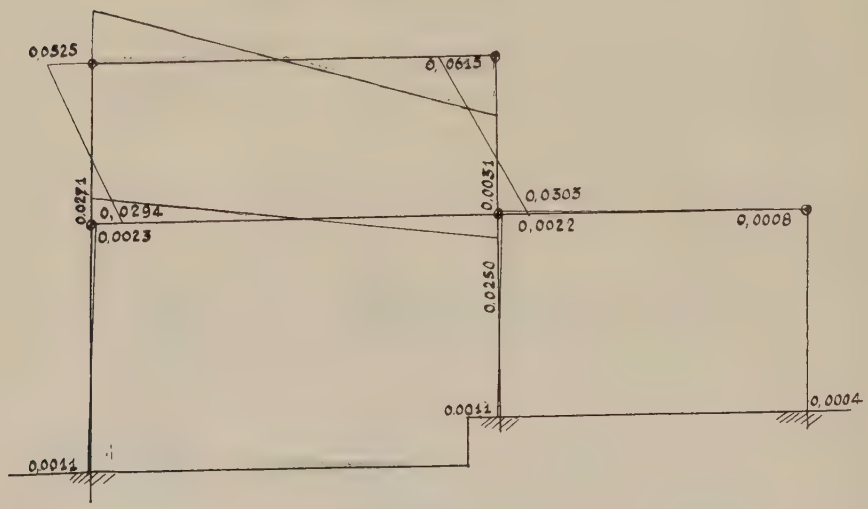


Fig. 333.

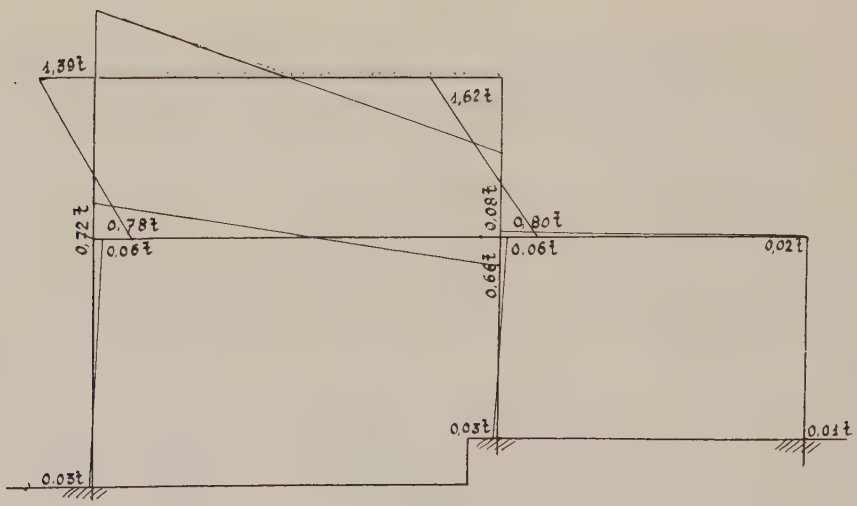


Fig. 334.

figure 333, que nous multiplions par 24,6, pour avoir ceux de la figure 334.

Procédons de même pour les moments en p afférents à la traverse 2-5, auxquels nous ajoutons les moments des

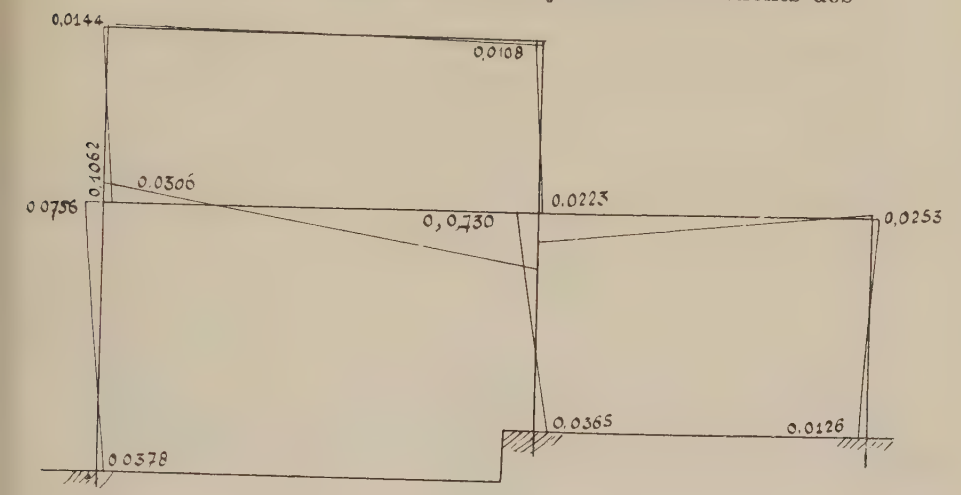


Fig. 335.

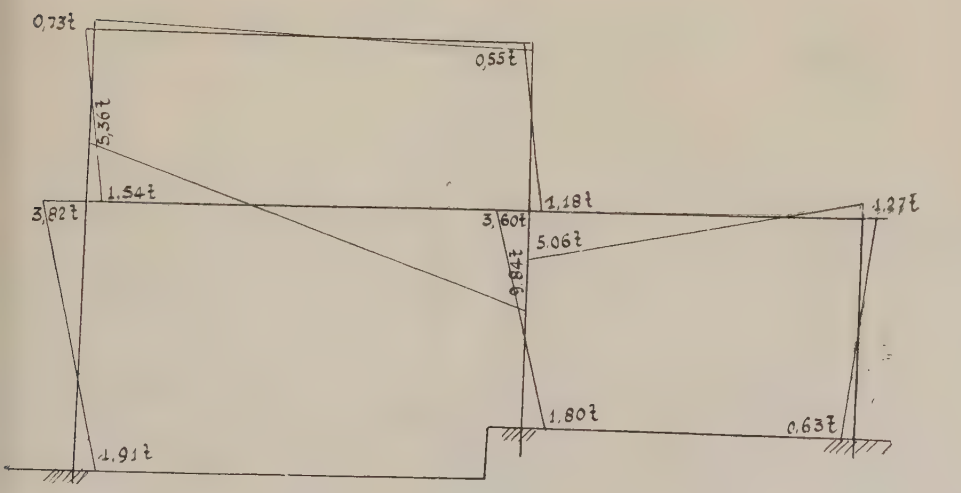


Fig. 336.

deux figures 276 et 279, changés de signe, nous avons ainsi ceux de la figure 335, lesquels, multipliés par 50,5, donnent ceux de la figure 336.

Nous continuons de la même manière pour le moment en q pour lequel nous n'avons qu'à prendre les moments

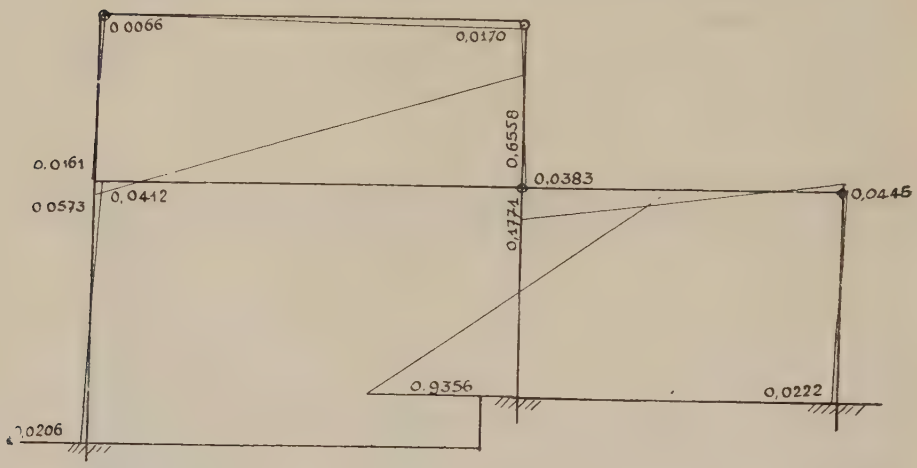


Fig. 337.

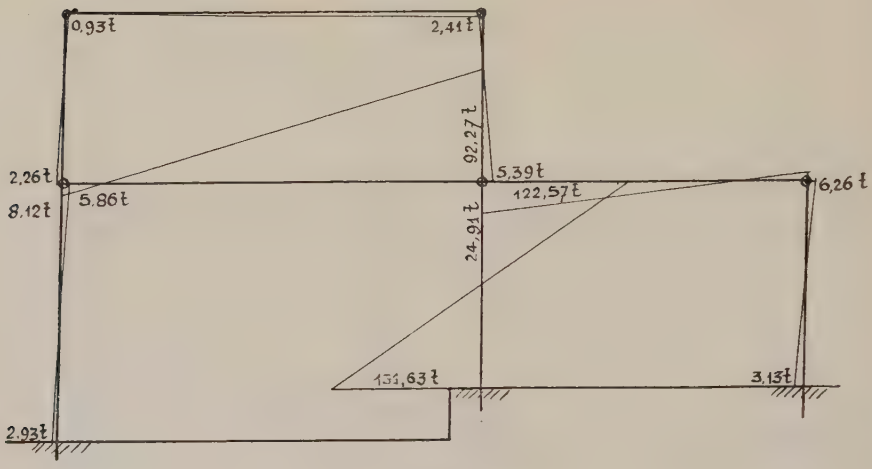


Fig. 338.

de la figure 279 de l'étude générale et, en les changeant de signe, nous avons ainsi ceux de la figure 337, lesquels, multipliés par 140,7 t, donnent ceux de la figure 338.

Finalement, pour les moments en 8 du montant 7-8, nous prenons ceux de la figure 283 de l'étude générale et

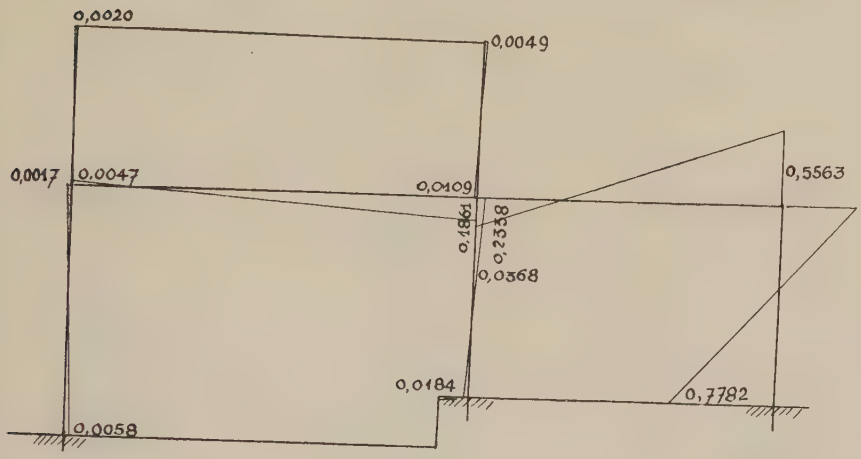


Fig. 339.

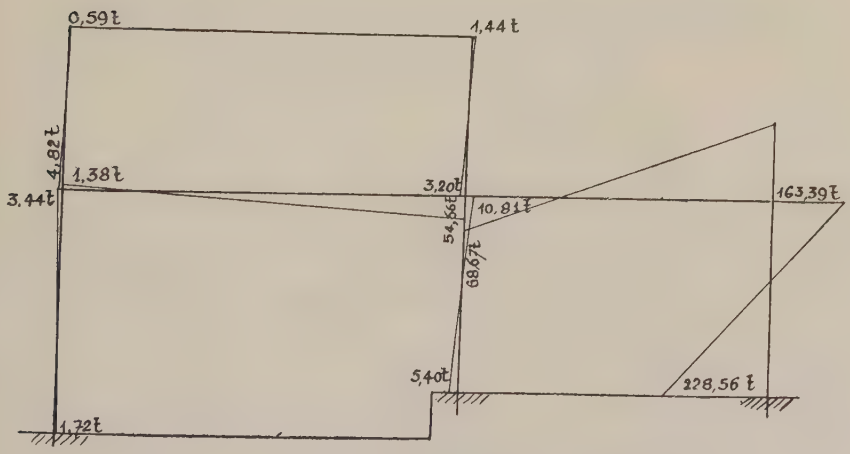


Fig. 340.

que nous changeons de signe, nous avons ainsi ceux de la figure 339, lesquels, multipliés par 293,7, donnent ceux de la figure 340.

Additionnons les moments des figures 334, 336, 338 et 340, nous avons ainsi les résultats indiqués à la figure 341.

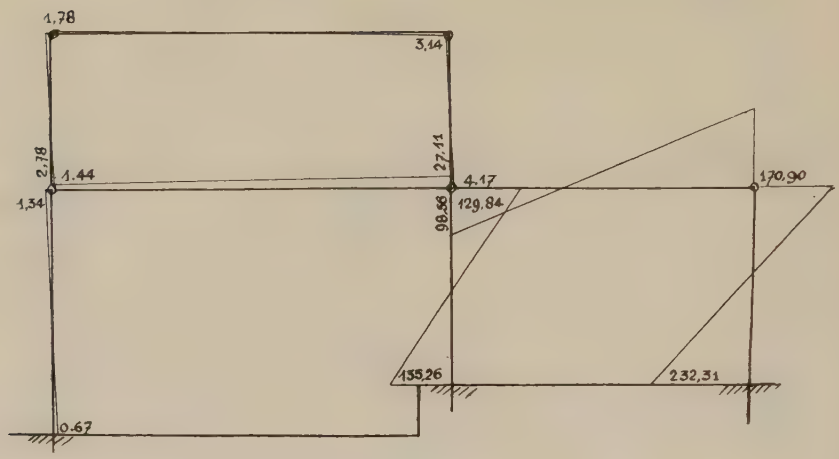


Fig. 341.

Les réactions des broches des appuis auxiliaires sont :
En 2 (fig. 342 et 343) :

$$= -\frac{134 + 0,67}{5,5} = -0,36, \qquad \frac{178 + 1,44}{3,5} = 0,92.$$

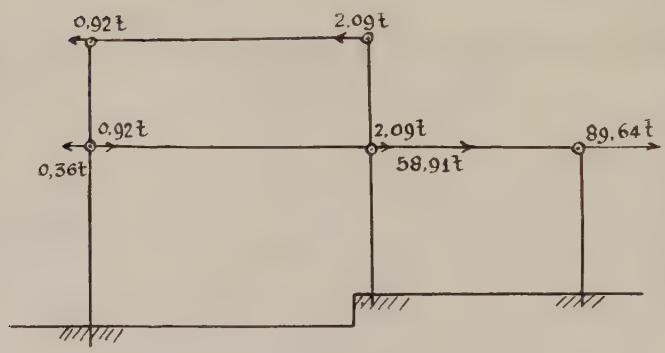


Fig. 342.

En 3 :

$$= -\frac{1,78 + 1,44}{3,50} = -0,92.$$

En 5 :

$$= \frac{129,84 + 135,26}{4,50} = 58,91, \qquad \frac{3,14 + 4,17}{3,50} = 2,09.$$

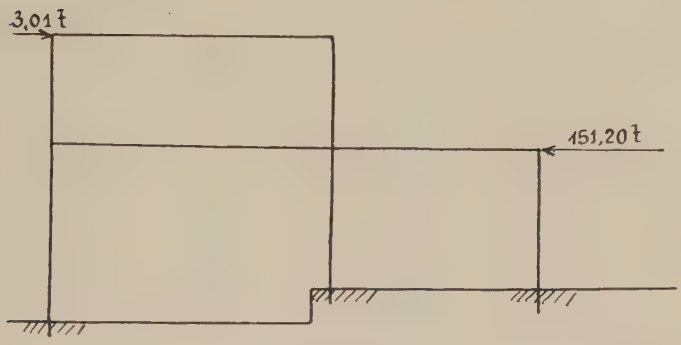


Fig. 343.

En 4 :

$$= -\frac{3,14 + 4,17}{3,50} = -2,09.$$

En 7 :

$$= \frac{170,90 + 232,57}{4,50} = 89,64,$$

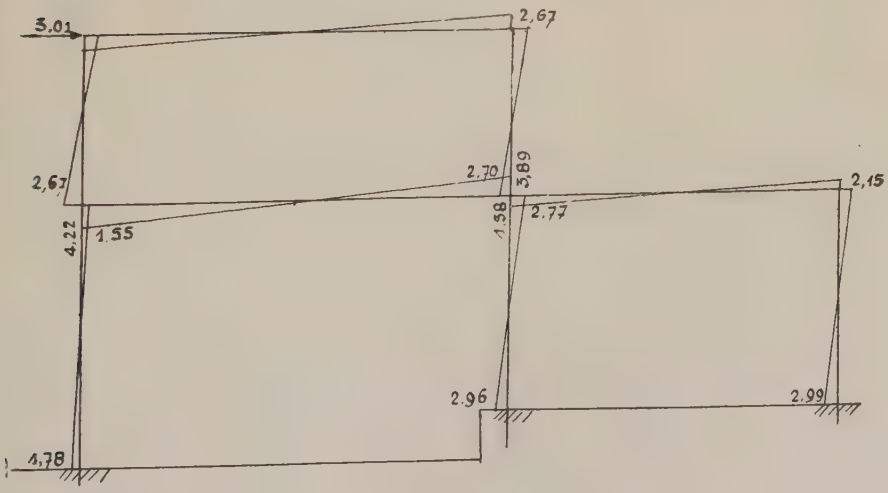


Fig. 344.

qui donnent, pour la traverse 2-5-7, la force d'entraîne-

ment — 151,20 et pour 3-4, 3,01, auxquelles correspondent les moments (fig. 344 et 345) :

$$
\begin{aligned}
M_1 &= 0{,}5920 \times 3{,}01 = 1{,}78 \text{ kg./m.} \times t. \\
M_{2-1} &= -0{,}5160 \times \ldots = -1{,}55 \\
M_{2-5} &= 1{,}4070 \times \ldots = 4{,}22 \\
M_{2-3} &= 0{,}8910 \times \ldots = 2{,}67 \\
M_3 &= -0{,}8910 \times \ldots = -2{,}67 \\
M_4 &= -0{,}8916 \times \ldots = -2{,}67 \\
M_{4-5} &= 0{,}9017 \times \ldots = 2{,}70 \\
M_{5-2} &= 1{,}2976 \times \ldots = 3{,}89 \\
M_{5-6} &= -0{,}9231 \times \ldots = -2{,}77 \\
M_6 &= -0{,}9872 \times \ldots = -2{,}96 \\
M_{5-7} &= -0{,}5272 \times \ldots = -1{,}58 \\
M_7 &= 0{,}7161 \times \ldots = 2{,}15 \\
M_8 &= -0{,}9964 \times \ldots = -2{,}99
\end{aligned}
$$

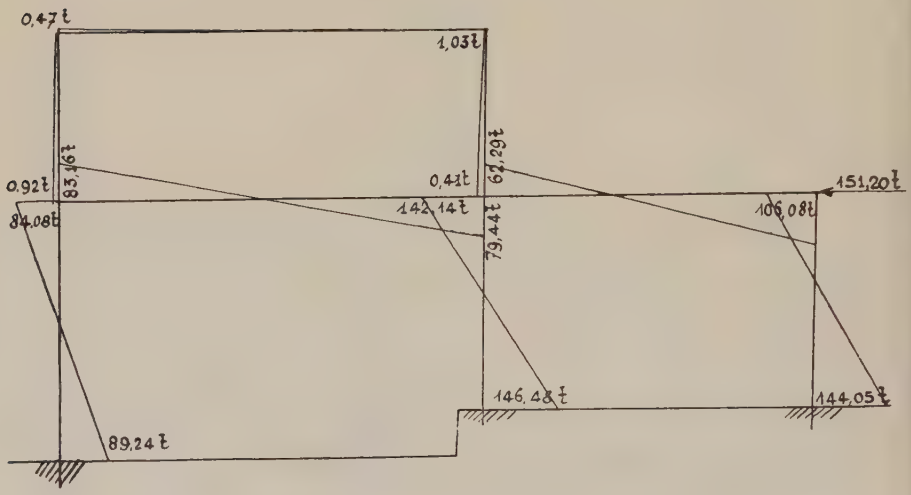


Fig. 345.

et :

$$
\begin{aligned}
M_1 &= -0{,}5902 \times 151{,}2 = -89{,}24 \text{ kg./m.} \times t. \\
M_{2-1} &= 0{,}5561 \times \ldots = 84{,}08 \\
M_{2-5} &= 0{,}5500 \times \ldots = 83{,}16 \\
M_{2-3} &= 0{,}0061 \times \ldots = 0{,}92 \\
M_3 &= 0{,}0031 \times \ldots = 0{,}47 \\
M_4 &= -0{,}0068 \times \ldots = -1{,}03 \\
M_{5-4} &= -0{,}0027 \times \ldots = -0{,}41 \\
M_{5-2} &= -0{,}5254 \times \ldots = -79{,}44 \\
M_{5-6} &= -0{,}9401 \times \ldots = -142{,}14 \\
M_6 &= 0{,}9688 \times \ldots = 146{,}48
\end{aligned}
$$

$$M_{5-7} = 0{,}4120 \times 151{,}2 = 62{,}29$$
$$M_7 = -0{,}7016 \times \ldots\ldots = -106{,}08$$
$$M_8 = 0{,}9527 \times \ldots\ldots = 144{,}05$$

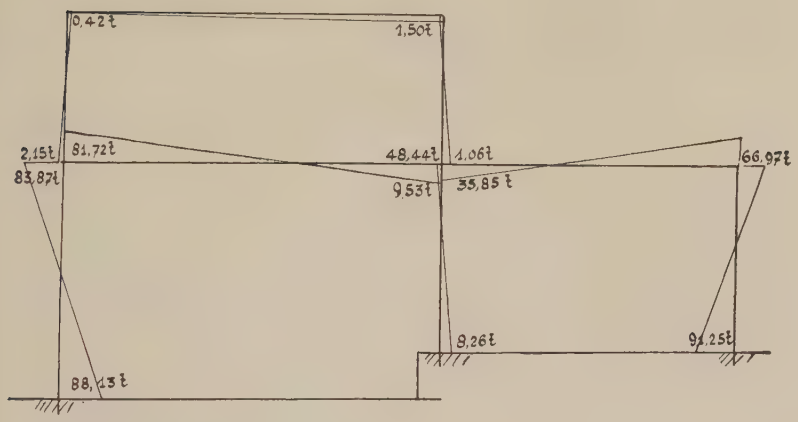


Fig. 346.

Additionnons les moments des figures 341, 344 et 345 et nous obtenons ainsi les moments cherchés en fonction

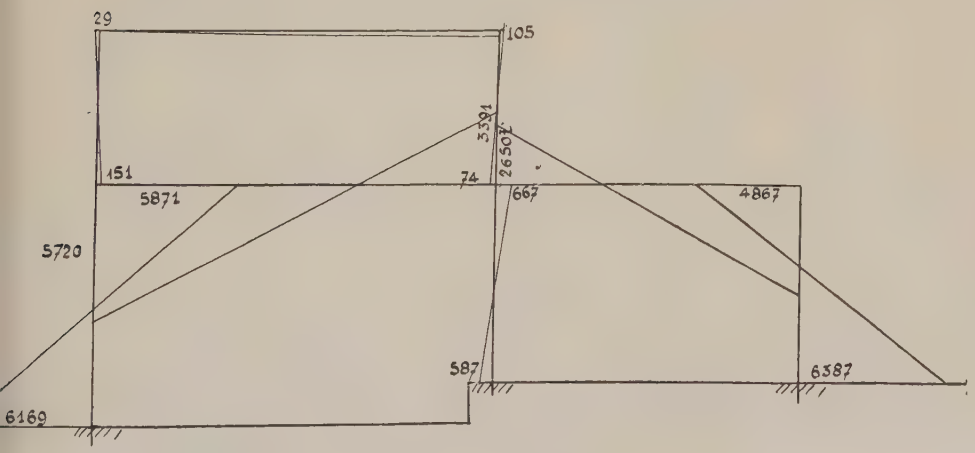


Fig. 347.

d'une variation d'un accroissement de température t (fig. 346).

Par exemple, pour un abaissement de 50° entre la tempé-

rature du temps de pose et celui considéré, si on ajoute l'influence du retrait pris comme analogue à un abaissement supplémentaire de — 20°, on a les moments correspondants en multipliant ceux de la figure 346 par — 70°, lesquels sont indiqués sur la figure 347.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

I. — Introduction 3

II. — Préliminaires 3

PREMIÈRE PARTIE

Méthode directe.

1° *Constructions à un étage :*
a) Constructions à deux travées. 9
b) Constructions à un nombre quelconque de travées. . . 11
2° *Constructions à étages :*
a) Constructions à une travée et deux étages. 14
b) Constructions à une travée et à un nombre quelconque d'étages. 16
c) Constructions à travées et étages en nombres quelconques 19
3° *Constructions à étages à grande nef centrale* 23
4° *Poutres à panneaux quelconques.* 25
5° *Portiques à panneaux* 27
6° *Constructions triangulées* 31
7° *Portiques à contreventements.* 36

DEUXIÈME PARTIE

Méthode des appuis auxiliaires a rotules.
Exposé de la méthode 39

A. — *Des appuis auxiliaires :*
1° Des appuis auxiliaires à rotules et de leurs emplacements . 41
2° Rotation des rotules 42
3° Variations angulaires aux rotules. 44
4° Coefficients de proportionnalité et foyers.
a) Arcs continus 45
b) Constructions continues à un étage 47
c) Constructions continues complexes 48
5° Coefficients angulaires des rotules 51
6° Charges quelconques entre deux appuis auxiliaires 53

Pages.

B. — *Effets des réactions sur les constructions à l'état naturel :*
1° Méthode directe 55
2° Méthode de déplacement des nœuds :
a) Préliminaires 55
b) Exposé de la méthode 58
3° Méthode des déplacements successifs des éléments :
a) Déplacements réels 60
b) Déplacements virtuels 62

Action de la température sur les constructions complexe.
1° Méthode directe 68
2° Méthode des appuis auxiliaires à rotules 68

Annexe.
Formules usuelles pour l'application de la méthode des appuis auxiliaires à rotules 71

TROISIÈME PARTIE

Applications pratiques 83

7365-33. — Tours, imprimerie Arrault et Cie.

2e THÈSE

Propositions données par la Faculté :

ÉNERGIE DE DÉFORMATION ÉLASTIQUE ; THÉORÈME DE CASTIGLIANO

Vu et approuvé :
Nancy, le 22 novembre 1932.
Le Doyen de la Faculté des Sciences,

M. LEAU.

Vu et permis d'imprimer :
Nancy, le 24 novembre 1932.

Le Recteur de l'Académie,
Président du Conseil de l'Université,

M. L. BRUNTZ.